Numerische Analysis

Übungsblatt 3, Abgabe Mi. 04.05.16, 18:00 Uhr

Aufgabe 1: Hermite-Interpolation **4 P.**

Gegeben seien Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ sowie Stützwerte y_i^k, $i = 0, \dots, n$, $k = 0, \dots, n_i$, $N = \sum_{i=0}^{n}(n_i+1)$. Zeigen Sie: Es existiert ein eindeutiges Interpolationspolynom $p \in P_{N-1}$ mit $p^{(k)}(x_i) = y_i^k \ \forall i, k$.

Aufgabe 2: Richardson-Extrapolation **4 P.**

Sei $x_i = 2^{-i}$, $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$ und $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2x}$. Die Folge $(g(x_i))_{i\to\infty}$ approximiert $f'(0)$. Berechnen Sie mit Hilfe der Richardson-Extrapolation eine Näherung für $f'(0)$ für $i = 0, 1, 2$.

Aufgabe 3: Diskrete Fouriertransformation **4 P.**

Die diskrete Fouriertransformation für eine Matrix $y \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ ist definiert durch

$$\hat{y}_{k_1 k_2} := \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \sum_{j_2=0}^{n_2-1} y_{j_1 j_2} \exp\Big(\frac{-2\pi i j_1 k_1}{n_1}\Big) \exp\Big(\frac{-2\pi i j_2 k_2}{n_2}\Big).$$

(a) Berechnen Sie die inverse diskrete Fouriertransformation.

(b) Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformation einer Delta-Distribution, d.h.

$$y_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falles } j = j_0, \ k = k_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für ein festes Indexpaar (j_0, k_0).

Aufgabe 4: Programmieraufgabe **4 P.**

(a) Schreiben Sie eine Funktion in Matlab, die die diskrete Fouriertransformation eines Vektors $y = (y_0, \dots, y_n)$ berechnet.

(b) Schreiben Sie eine Funktion in Matlab, die die inverse diskrete Fouriertransformation eines Vektors $y = (y_0, \dots, y_n)$ berechnet.

Testen Sie Ihre Funktion aus (a) am Beispiel aus der Vorlesung: Seien $t_j = \frac{2\pi j}{4}$, $j = 0, \dots, 3$, gegebene Stützstellen und $y = (0, 1, 0, -1)$ die zugehörigen Stützwerte. Berechnen

Sie die Koeffizienten einer periodischen Funktion $g(t) = \sum_{j=0}^{3} a_j \exp(ijt)$, sodass $g(t_j) = y_j$, mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation. Testen Sie Ihre Funktion aus (b), indem Sie sie auf das Ergebnis der Funktion aus (a) anwenden.