Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger 24.06.2008

Übung zur Vorlesung

Höhere Numerische Mathematik

SS 2008 — Blatt 11

Abgabe: 01.07.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Vektoriteration) (4 Punkte)

(a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für $\mu \in \mathbb{C}$ gilt: λ EW von $A \Longrightarrow \lambda - \mu$ ist EW von $A - \mu I$.

(b) Bestimmen Sie unter Ausnutzung der Vektoriterationsmethode (Vorlesung: 3.30, 3.33 und 3.34) eine Näherung für das Spektrum der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (QR-Verfahren) (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär. Die QR-Zerlegung $A = QR$ sei gegeben. Zeigen Sie, dass für $A^1 = RQ$ gilt:

(a) $\det A = \det A^1$,

(b) A Hessenbergmatrix $\Longrightarrow A^1$ Hessenbergmatrix,

(c) A symmetrische Bandmatrix der Bandbreite m, d.h. $a_{ij} = 0$ für $|i-j| \geq m+1 \Longrightarrow$ A^1 ist symmetrische Bandmatrix der Bandbreite m.

Aufgabe 3 (A priori Abschätzung der Eigenwerte) (3 Punkte)
Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein EW zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

$$|\lambda| \leq \max_{j=1,\dots,n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| \quad \text{und} \quad |\lambda| \leq \left(\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2 \right)^{1/2}.$$

Aufgabe 4 (A posteriori Abschätzung für den relativen Fehler) (5 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Zeigen Sie:

(a) $\langle Ax, u_j \rangle = \lambda_j \langle x, u_j \rangle \quad \forall j = 1, \ldots, n.$

(b) $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j.$

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \neq 0$ und für alle $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ existiert ein Eigenwert $\lambda \neq 0$ von A, so dass gilt

$$\left| \frac{\lambda - \overline{\lambda}}{\lambda} \right| \leq \frac{\left\| Ax - \overline{\lambda} x \right\|}{\|Ax\|}.$$