Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 17.06.2008
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger

Übung zur Vorlesung

Höhere Numerische Mathematik

SS 2008 — Blatt 10

Abgabe: 24.06.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass die Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und A^T identisch sind. Stimmt diese Aussage auch für die Eigenvektoren? (Natürlich muss die Antwort begründet werden!)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ eine Diagonalmatrix. Zeigen Sie, dass durch die Ähnlichkeitstransformation $A \mapsto D^{-1}AD$ die Gerschgorin Kreise die Form

$$K_i = \left\{ x \in \mathbb{C} \ : \ |x - a_{ii}| \leq \sum_{k \neq i} \left| \frac{a_{ik} d_k}{d_i} \right| \right\}$$

haben.
Finden Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 3 \end{pmatrix}$$

einen Kreis in dem genau ein Eigenwert von A liegt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

auf Hessenberg Form.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

- Zeigen Sie, dass bei einer Hessenberg Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das Eigenwertproblem für A aufgeteilt werden kann in mehrere Eigenwertprobleme für unreduzierte Hessenberg Matrizen $A_1, \dots, A_r$ mit $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ und $n_i \leq n$ $(1 \leq i \leq r, i \in \mathbb{N})$.
- Verallgemeinern Sie das Verfahren aus Satz 3.24 für den Fall allgemeiner Tridiagonalmatrizen.