Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 10.06.2008
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger

Übung zur Vorlesung

Höhere Numerische Mathematik

SS 2008 — Blatt 9

Abgabe: 17.06.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (cg-Verfahren) (6 Punkte)
Implementieren Sie das cg-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times m}, b \in \mathbb{R}^m$ gegeben und A positiv definit und symmetrisch.
Implementierung:
Das cg-Verfahren sollte für beliebige $m \in \mathbb{N}$ implementiert werden.
Die Funktion zur Lösung des LGS sollte von der Form

cg(m,b,x,eps)

sein. Der Rückgabewert sollte die Anzahl der durchgeführten Iterationen sein und der Parameter *eps* sollte für das Abbruchkriterium verwendet werden. Die rechte Seite steht im Parameter b und x ist bei Aufruf gleich dem Startwert für die Iteration und bei der Rückgabe gleich der berechneten Lösung des LGSs.
Benutzen Sie, wo erforderlich, die in $Matlab$ implementierten $sparse$-Matrizen.
Testen:

(a) Testen Sie ihr Verfahren mit $m = 601$ anhand der Matrix $A = (a_{ij})$ mit $i, j = 0, \ldots, m-1$:

$$a_{ii} = 4, \quad a_{ij} = -1 \text{ falls } j \neq i \text{ und } j = i+1, j = i-1, j = m-1-i$$

und der rechten Seite

$$b_i = -m + 2 + 3i \text{ für } i \neq \frac{m-1}{2} \text{ und } i \neq m-1, \quad b_{\frac{m-1}{2}} = 602,\ b_{m-1} = 1803.$$

Die exakte Lösung ist $x_i = i + 1$.

(b) **Hilbert Matrix**: Ein notorisch schlecht konditioniertes Problem ist $a_{ij} = (i+j+1)^{-1},\ b_i = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j (i+j+1)^{-1}$ mit exakter Lösung $x_i = (-1)^i$ $(i, j = 0, \ldots, m-1)$. Testen Sie das cg-Verfahren mit $m = 5$ und $m = 10$.

Wählen Sie für *eps* zum einen $1e-13$ und zum anderen $1e-8$. Geben Sie jeweils den maximalen Fehler zur exakten Lösung sowie die Anzahl der Iterationen im cg-Verfahren an.

Aufgabe 2 (Finite Elemente) (10 Punkte)

Gegeben sei folgendes Randwertproblem:

$$(P) \qquad \begin{cases} -u''(x) + \pi^2 u(x) = 2\pi^2 \sin(\pi x), & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Sei $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = 1$ ein Zerlegung mit $h_i = x_{i+1} - x_i$. Sei $P_k(x_i, x_{i+1})$ der Raum der Polynome mit maximalem Grad $k \geq 0$ auf dem Intervall (x_i, x_{i+1}) und $V_h := \{v_h \in C^0(0,1) \mid v_{h|[x_i,x_{i+1}]} \in P_k(x_i, x_{i+1})\}$.

(a) Berechnen Sie für die eindeutig bestimmten Elemente $\varphi_j \in V_h$ mit $\varphi_j(x_l) = \delta_{jl}$ für $(j, l = 0, \ldots, (n+1))$, k=1 und $h_i = \frac{1}{n+1}$ $(i = 0, \ldots, n)$ die zugehörige Steifigkeitsmatrix $S_h := \left(\int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' + \pi^2 \int_0^1 \varphi_i \varphi_j \right)_{i,j}$.

(b) Lösen Sie (P) numerisch mit der Methode der Finiten Elemente. Benutzen Sie dabei das in Aufgabe 1 programmierte cg-Verfahren und Ihre Ergebnisse aus Teil (a).

(c) Die exakte Lösung des Problems (P) ist $u(x) = \sin(\pi x)$. Berechnen Sie für die verschiedenen Schrittweiten h_n $(h_n = 2^{-n}, 1 \leq n \leq 10)$ den L_2-Fehler $e_h = (\int_0^1 |u - u_h|^2)^{0.5}$. Stellen Sie $\log(e_h)$ graphisch als Funktion von $\log(h)$ dar und interpretieren Sie die Ergebnisse.