Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger 03.06.2008

Übung zur Vorlesung

Höhere Numerische Mathematik

SS 2008 — Blatt 8

Abgabe: 10.06.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Beweis von Satz 1.110) (4 Punkte)
Beweisen Sie die beiden Abschätzungen in Satz 1.110.
Hinweis: Benutzen Sie für die zweite Abschätzung folgenden Spezialfall des Haupsatzes der Variationsrechnung: Aus

$$\int_0^1 \varphi\,(-pu'' - p'u' + qu - f) = 0 \tag{1}$$

für alle $\varphi \in X$, folgt fast überall in $(0,1)$

$$-pu'' - p'u' + qu - f = 0. \tag{2}$$

Aufgabe 2 (Greensche Funktion) (4 Punkte)
Seien u_1, u_2 wie in Aufgabe 4 von Blatt 7 gewählt und w die Konstante aus Aufgabe 4 von Blatt 7.
Zeigen Sie, dass $u(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)\,dy$ die Lösung des RWP von Blatt 7 ist mit

$$G(x,y) = -\frac{1}{w}\begin{cases} u_2(x)u_1(y), & y < x, \\ u_1(x)u_2(y), & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

Aufgabe 3 (Kontinuierliches Maximumsprinzip) (4 Punkte)
Sei G wie in Aufgabe 2 und sei $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Zeigen Sie

(i) $G(x,y) \neq 0$ für $x, y \in (a,b)$.
(ii) Sei v die Lösung von $L(v) = 1, R_1(v) = R_2(v) = 0$ (siehe Blatt 7), dann gilt

$$\int_a^b \int_a^b G(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_a^b v(x)\,dx, \qquad \int_a^b (p(v')^2 + qv^2)\,dx \;=\; \int_a^b v(x)\,dx.$$

Benutzen Sie das bisher gezeigte, um das kontinuierliche Maximumsprinzip zu zeigen:
Ist $u \in C^2(a,b)$ mit $L(u) \geq 0$ auf $[a,b]$ und $u(a) = u(b) = 0$, so ist $u \geq 0$ auf $[a,b]$.
Hinweis: aus (i) und (ii) folgt $G(x,y) > 0$ für $x, y \in [a,b]$.

Aufgabe 4 (Diskretes Maximumsprinzip) (4 Punkte)

Betrachte das AWP $-y'' = f$ auf $[0,1]$ und $y(0) = 0, y(1) = 0$.

(i): Diskretisieren Sie das AWP auf einem gleichmäßigen Gitter der Gitterweite $h = \frac{1}{n+1}$ mit Randpunkten $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ mittels der Differenzenapproximation $y''(x_i) \approx \frac{1}{h^2}(y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))$ und stellen sie für die Approximationswerte $y_i \approx y(x_i)$ das definierende lineare Gleichungssystem $A_h y_h = f_h$ auf, mit einer Matrix $A_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und den Vektoren $y_h = (y_1, \ldots, y_n), f_h = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$.

(ii): Beweisen Sie das **diskrete Maximumprinzip**: Ist $A_h v_h \geq 0$ dann gilt $v_h \geq 0$; dabei ist ein Vektor $w_h = (w_1, \ldots, w_n)$ größer oder gleich Null, falls alle seine Komponenten w_i größer oder gleich Null sind.

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung für $v_s := \min\{v_j\}$ und zeigen Sie, dass ohne Einschränkung $s = 1$ oder $s = n$ gewählt werden kann.

(iii): Zeigen Sie mit Hilfe des diskreten Maximumprinzips, dass die Matrix A_h regulär ist.