Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 27.05.2008
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger

Übung zur Vorlesung

Höhere Numerische Mathematik

SS 2008 — Blatt 7

Abgabe: 03.06.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Beweis von Satz 1.74 I) (4 Punkte)
Zeigen Sie die Äquivalenz von (i) mit (iv) und (v) in Satz 1.74 aus der Vorlesung.
Hinweis: Verwenden Sie die bereits gezeigte Äquivalenz von (i) mit (ii) bzw. (iii).

Aufgabe 2 (Beweis von Satz 1.74 II) (4 Punkte)
Zeigen Sie die Äquivalenz von (i) mit (vi) in Satz 1.74 aus der Vorlesung.
Hinweis: Verwenden Sie die bereits gezeigte Äquivalenz von (i) mit (ii) bzw. (iii).

Im Folgenden betrachten wir Randwertprobleme (RWP) der Form

$$\begin{aligned} L(u) := -(pu')' + qu &= f \qquad \text{in} \quad (a,b), \\ R_1(u) := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0, \\ R_2(u) := \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Wir betrachten hier ein RWP mit unstetigen Daten. Sei dazu $p = 1, q = 0$ und $f(x) = -\mathrm{sign}(x)$; für die Randbedingungen wählen wir $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ und $\beta_1 = 1, \beta_2 = -0.5$ und $a = -1, b = 1$. Geben Sie eine schwache Lösung für dieses Problem an.
Hinweis: Versuchen Sie in $u(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sign}(x)x^2 + C_1 x + C_2$ die Konstanten geeignet zu wählen.

Aufgabe 4 (Wronsky-Determinante) (4 Punkte)
Die Daten erfüllen folgende Regularitätsbedingungen:

$$p \in C^1(a,b), p \geq p_0 > 0, q, f \in C^0(a,b), q \geq 0, |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, |\beta_1| + |\beta_2| > 0$$

und wir gehen davon aus, dass das RWP eindeutig lösbar ist. Seien u_1, u_2 nicht-triviale Lösungen von $L(u_1) = 0, R_1(u_1) = 0$ bzw. $L(u_2) = 0, R_2(u_2) = 0$. Die Wronsky-Determinante ist gegeben durch $W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto p(x)W(x)$ eine Konstante w ungleich Null darstellt.
Hinweis: Verwenden Sie, dass das AWP $Lu = 0, u(x_0) = g_0, u'(x_0) = g_1$ eindeutig lösbar ist.