Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 6.05.2008
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger

Übung zur Vorlesung

Höhere Numerische Mathematik

SS 2008 — Blatt 5

Abgabe: 13.05.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Beweis Satz 1.63) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $f \in C^k(S)$ das k-Schritt BDF-Verfahren Konsistenzordnung k hat, falls die Startwerte hinreichend konsistent sind.

Aufgabe 2 (Anwendung des Differenzenkalküls in der Numerik) (4 Punkte)
Konstruieren Sie ein Mehrschrittverfahren der Konsistenzordnung $p \geq 1$, welches i.a. sogar für ein lineares AWP nicht konvergiert.
Skizze: Betrachten Sie z.B. das Verfahren $u_{j+2} - 3u_{j+1} + 2u_j = -hf(x_{j+1}, u_{j+1})$ auf einem äquidistanten Gitter mit $h = \frac{1}{N}$ zusammen mit dem AWP $y' = -y$, $y(0) = 1$ auf $I = [0, 1]$. Zeigen Sie, dass Sie $u_1 = 1 + O(h)$ wählen können, so dass $u_N \to \infty$ für $N \to \infty$. Begründen Sie warum die Aufgabe dadurch gelöst wird!

Aufgabe 3 (Zentrale Differenzen I) (4 Punkte)
Diskretisieren Sie das AWP

$$y'' + y = x, \quad y(0) = y'(0) = 0 \tag{1}$$

mit exakter Lösung $\tilde{y} = x - \sin(x)$ auf einem äquidistanten Gitter $I_h \subset [0, 1], h = \frac{1}{m}, m \in$, indem Sie y'' mit zentralen Differenzen diskretisieren:

$$y''(x) \approx \frac{y(x + 2h) - 2y(x + h) + y(x)}{h^2}.$$

(a) Zeigen Sie das $u_{j+2} - 2u_{j+1} + (1 + h^2)u_j = jh^3$ für $j = 0, \ldots, m - 2$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass das geschilderte Verfahren mit Startwerten $u_0 = u_1 = 0$ gedeutet werden kann als explizites Eulerverfahren angewendet auf das AWP

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \qquad y_1(0) = 0, \\ y_2' &= x - y_1 \qquad y_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Zentrale Differenzen II) (4 Punkte)
Berechnen Sie für das AWP (1) mit der Diskretisierung aus Aufgabe 3 und Startwerten $u_0 = u_1 = 0$ die Werte u_j $(j = 2, \ldots, m)$. Zeigen Sie, dass die Fehlerabschätzung $|u_j - \tilde{y}(jh)| = O(h)$ gilt.