Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger 29.04.2008

Übung zur Vorlesung

Höhere Numerische Mathematik

SS 2008 — Blatt 4

Abgabe: 06.05.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Implizite Runge-Kutta-Verfahren) (4 Punkte)
Gegeben sei die Schar von linearen AWP $y'(x) = \lambda y(x), y(0) = y_0$ mit $\lambda < 0$, $x \in I = [0, 1]$. Seien $(x_i, u_i)_{i=0,\dots,n-1}$ durch ein implizites Runge-Kutta-Verfahren mit $m \geq 1$ Stufen auf einem äquidistanten Gitter I_h gegeben.
Zeigen Sie, dass

$$u_i = [R(\lambda h)]^i u_0$$

gilt, wobei $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ eine rationale Funktion ist mit Polynomen P, Q höchstens m-ten Grades. Bestimmen Sie jeweils die Funktion R für die impliziten Runge-Kutta Verfahren mit den Schemata

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

und zeigen Sie für das erste Verfahren, dass $|e^t - R(t)| = O(t^{2m+1})$ mit $m = 1$ gilt.

Aufgabe 2 (Beweis Satz 1.45) (4 Punkte)
Beweisen Sie die Implikation (2)$\Rightarrow$(1) aus Satz 1.45.
Hinweis: Für $n \geq 0$ kann $p(n + t)$ mit Hilfe der Newton Interpolationsformel zu den Stützstellen $x_i = i$ dargestellt werden: $p(n + t) = \sum_{i=0}^{k} a_i \Pi_{l=0}^{i-1}(t - l)$, wobei $a_m = a_{m+1} = \cdots = a_k = 0$, da der Grad von p kleiner als m ist.

Aufgabe 3 (Beweis Lemma 1.51) (4 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 1.51 aus der Vorlesung.

Aufgabe 4 (Anwendung des Differenzenkalküls im Leben) (4 Punkte)
Sie wohnen in einem Hochhaus ohne Fahrstuhl und mit $n \geq 1$ Stufen. Sie können beim Hochsteigen entweder eine oder zwei Stufen auf einmal nehmen. Berechnen Sie die Anzahl der Varianten u_n wie Sie die n Stufen hochgehen können.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ gilt.