Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger

22.04.2008

Übung zur Vorlesung

Höhere Numerische Mathematik

SS 2008 — Blatt 3

Abgabe: 29.04.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Explizite Runge-Kutta-Verfahren) (10 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines allgemeinen AWP mittels expliziter Runge-Kutta-Verfahren. Implementieren Sie hierzu das explizite Euler-Verfahren, das verbesserte Euler-Verfahren, das 4-stufige klassische Runge-Kutta-Verfahren, das Verfahren von Heun und alle 2-stufigen Verfahren der Konsistenzordnung 2. Dabei soll der Nutzer beim Start des Programmes das Verfahren auswählen können; für die 2-stufigen Verfahren soll zusätzlich der freie Parameter α_2 übergeben werden.

Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren, dem verbesserten Euler-Verfahren, dem klassischen Runge-Kutta Verfahren und den 2-stufigen Verfahren mit $\alpha_2 = 0.5$ und $\alpha_2 = 1$ eine Approximation von $y(4)$, wobei $y(x) = (\sin(x) + 1)^{0.25}$ die Lösung des AWP mit rechter Seite $f(x, y) = \frac{\cos(x)}{4y^3}$ und dem Anfangswert $y_0 = 1$ ist.
Geben Sie für $h = 2^{-n}, \quad n = 1, \dots, 10$ die Approximation sowie den Fehler zur exakten Lösung aus.

Aufgabe 2 (Polynomrekonstruktion) (6 Punkte)
Berechnen Sie für das explizite Eulerverfahren, das verbesserte Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun eine Polynomrekonstruktion entsprechenden Grades (1,2,3) für obiges AWP. Nutzen Sie hierfür die im Verfahren benutzen Funktionsauswertungen als zusätzliche Stützwerte, um die Polynome auf den Intervallen eindeutig zu bestimmen.

Beispiel: Beim verbesserten Euler-Verfahren sind die drei Stützstellen auf jedem Teilintervall $[x_j, x_j + h]$ x_j, $x_j + h$ und $x_j + \frac{h}{2}$ und die Stützwerte u_j, u_{j+1} und $u_j + \frac{1}{2}hf(x_j, u_j)$.

Berechnen Sie die Experimental Order of Convergence (EOC) und den L^2-Fehler der Polynomrekonstruktion für die Schrittweiten aus Aufgabe 1. Sie können hierfür eine in Matlab implementierte Quadratur (bspw. *quad*) nutzen. Der EOC ist für eine numerische Approximation u_h der exakten Lösung u folgendermaßen definiert:

$$EOC = \frac{\ln(\|(u - u_{2h})\| \,/\, \|(u - u_h)\|)}{\ln 2}. \tag{1}$$