Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger 15.04.2008

Übung zur Vorlesung

Höhere Numerische Mathematik

SS 2008 — Blatt 2

Abgabe: 22.04.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Diskretes Lemma von Gronwall) (4 Punkte)
Zeigen Sie: Seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}, (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive Folgen mit $e_{n+1} \le (1+q_n)e_n + p_n$ für $n < N$. Dann gilt:

$$e_n \le \Big(e_0 + \sum_{j=1}^{n-1} p_j\Big) \exp\Big(\sum_{j=0}^{n-1} q_j\Big) \qquad \text{für } n < N.$$

Aufgabe 2 (Verbessertes Euler Verfahren) (4 Punkte)
Das AWP erfülle auf dem zulässigen Rechteckgebiet S die Bedingungen (L) und (M). Ferner sei $f \in C^2(S)$ und $y \in C^3(I)$. Das verbesserte Euler Verfahren ist gegeben durch die Verfahrensfunktion

$$\phi(x, y, h) := f\Big(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\Big).$$

Es sei $u_0 = y_0$. Zeigen Sie, dass das Verfahren die Konvergenzordnung 2 hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung 3 mit 3 Stufen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Gegeben sei die Schar von linearen AWPen $y'(x) = \lambda y(x), y(0) = y_0$ mit $\lambda < 0, x \in I = [0, 1]$. Seien $(x_i, u_i)_{i=0,dots,n-1}$ mit $u_0 = y_0$ durch ein explizites Runge-Kutta Verfahren mit $m \ge 1$ Stufen auf einem äquidistanten Gitter I_h gegeben. Zeigen Sie, dass es ein Polynom P höchstens m-ten Grades gibt mit

$$u_i = \Big(P(\lambda h)\Big)^i u_0.$$

Bestimmen Sie das Polynom P für das verbesserte Euler Verfahren aus Aufgabe 1 und für das klassische Runge-Kutta Verfahren und vergleichen Sie es jeweils mit der Taylorentwicklung in y_0 für die exakte Lösung des AWPs.