Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 7.04.2008
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger

Übung zur Vorlesung

Höhere Numerische Mathematik

SS 2008 — Blatt 1

Abgabe: 15.4.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $I := [a,b],\ b < a\ , G \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhngende und offene Teilmenge, $S := I \times G$ und $f : S \to \mathbb{R}^n$ stetig und $y_0 \in G$. Dann sind äquivalent:

a) $y : I \to \mathbb{R}^n$ lst (AWP).

b) $y \in C^0(I,G)$ und $y(x) = y_0 + \int_a^x f(s,y(s))ds\ \ \forall x \in I$.

Aufgabe 2 (Picard-Lindelöf) (4 Punkte)
Zeigen Sie: Es gelten die Vor. aus Aufgabe 1 und zusätzlich sei f Lipschitz-stetig bezüglich y. Erfülle f auf S die (M)-Bedingung, $||f(x,y)||_\infty \leq M\ \forall (x,y) \in S$, und G erfülle zusätzlich $G \supseteq \overline{B_\sigma(y_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - y_0||_\infty \leq \sigma\}$, wobei $\sigma \geq (b-a)M$ sei. Dann gilt:

a) Das AWP hat auf I genau eine Lösung $\tilde{y}$.

b) $\forall x \in I$ gilt $(x, \tilde{y}(x)) \in K_M \cap S$ mit
$K_M = K_M(a, y_0) := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n | ||y - y_0||_\infty \leq M|x-a|\}$.

Aufgabe 3 (Lemma von Gronwall) (4 Punkte)
Zeigen Sie: Sei $p, q \in C^0([a,b])$ mit $p, q \geq 0$. Erfüllt die Funktion $e : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Integralbedingung

$$0 \leq e(x) \leq p(x) + \int_a^x q(s)e(s)ds \qquad \forall x \in [a,b],$$

so gilt:

$$0 \leq e(x) \leq p(x) + \int_a^x q(s)p(s)\exp\left(\int_s^x q(t)dt\right)ds.$$

Aufgabe 4 (Exponentialfunktion für Matrizen) (4 Punkte)
Zeigen sie für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

(a) Ist $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ ein Diagonalmatrix, so gilt

$$e^A = Be^D B^{-1} \text{ mit } e^D := \operatorname{diag}(e^{d_1}, \ldots, e^{d_n}).$$

(b) Es gilt $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$ für $t, s \in \mathbb{R}$.

(c) Im allgemeinen gilt nicht $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.