Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 9 , Abgabe: 15.06.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Die AWA

$$y' = f(x)g(y) \,, \qquad y(x_0) = y_0$$

mit stetigen Funktionen f, g kann gelöst werden durch Integration der formalen Beziehung $dy/g(y) = f(x)dx$ zu

$$\int_{y_0} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0} f(x)dx \qquad (g(y_0) \neq 0) \,.$$

Berechnen Sie hiermit die Lösung der folgenden AWA unter Angabe des maximalen Existenzintervalls.

(a) $y' = ky^2 \;, \quad y(0) = y_0 \qquad (k > 0)$

(b) $y' = \frac{2x}{y+yx^2} \;, \quad y(2) = 3.$

Aufgabe 28: (4 Punkte)

(a) Transformieren Sie das DGL-System

$$\begin{aligned} u'' + u'v' + tv' \sin(u^2) &= 0, \\ v'' + tuv + v^3 \cos(u') &= 0 \end{aligned}$$

in ein äquivalentes System 1. Ordnung der Form $\dot{y} = f(t, y)$. Dabei bezeichne

$$\begin{aligned} u' &= \frac{du}{dt} \\ v' &= \frac{dv}{dt}. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie durch Überlegung die eindeutig bestimmte Lösung der AWA

$$\begin{aligned} y'(x) &= (x^2 + 1) \tan(y(x))(y(x)^2 - 1), \\ y(0) &= -1. \end{aligned}$$

Aufgabe 29: (Programmieraufgabe, Abgabe: **Dienstag 26.06.2007**, 8 Punkte)
Die Lösung $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^T$ der AWA

$$y'(x) = f(x, y) \,, \qquad y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

soll im Intervall $[x_0,\, x_e]$ in den Punkten

$$\begin{array}{rcl} x_i &:=& x_0 + i \cdot h \ , \quad i = 1, \ldots, m, \\ h &:=& (x_e - x_0)/m \end{array}$$

berechnet werden. Das zugehörige Hauptprogramm soll die beiden folgenden Unterprogramme benutzen:

(1) `f(n,x,y,dy)`:

x: unabhängige Variable,

y: n-Vektor der abhängigen Variablen,

dy: Feld der Länge n;
dy enthält bei Verlassen der Routine die Werte $f(x, y)$ der rechten Seite der Dgl. (1)

(2) `integ(n,x,h,y)`:

x: unabhängige Variable,

h: Schrittweite,

y: n-Vektor der abhängigen Variablen;
y enthält beim Aufruf der Routine den Wert der Lösung im Punkte x und beim Verlassen den Wert der Lösung im Punkte $x + h$.

Es sollen drei verschiedene `integ` Routinen programmiert werden, `integ` bedeute wahlweise das

(a) EULER-Verfahren,

(b) das modifizierte EULER-Verfahren,

(c) das RUNGE-KUTTA-Verfahren.

Man teste das Programm an folgenden AWA'n:

AWA 1:

$$\begin{array}{rclcrcll} y' &=& x + y &,& y(0) &=& 1 &, \\ x_0 &=& 0 &,& x_e &=& 1 &, \quad m = 1, 2, 4, 8 \end{array}$$

exakte Lösung: $y(x) = 2e^x - (1 + x)$.

AWA 2: Räuber-Beute-Modell:

$$\begin{array}{rclcrcll} \dot{x} &=& 10x(1 - y) &,& x(0) &=& 3, & \\ \dot{y} &=& y(x - 1) &,& y(0) &=& 1, & \\ t_0 &=& 0.0 &,& t_e &=& 5.0 &, \quad m = 20, 50, 100 \end{array}$$

Man ermittle eine Schätzung für die Periode $T_0 > 0$.

AWA 3: Bahnkurve eines Satelliten: Die Bahnkurve eines Satelliten, der sich im Gravitationsfeld von Erde und Mond bewegt, wird für den Fall, dass die drei Himmelskörper sich in einer Ebene bewegen, durch die Gleichungen

$$y_1'' = y_1 + 2y_2' - \mu' \frac{y_1 + \mu}{D_1} - \mu \frac{y_1 - \mu'}{D_2} \tag{2}$$
$$y_2'' = y_2 - 2y_1' - \mu' \frac{y_2}{D_1} - \mu \frac{y_2}{D_2} \tag{3}$$

mit

$$\begin{aligned} D_1 &= \left((y_1 + \mu)^2 + y_2^2\right)^{3/2}, \\ D_2 &= \left((y_1 - \mu')^2 + y_2^2\right)^{3/2}, \\ \mu &= 0.012277471, \\ \mu' &= 1 - \mu \end{aligned}$$

beschrieben. Dabei ist (y_1, y_2) ein um den Ursprung rotierendes Koordinatensystem, in dem sich Mond und Erde an den festen Punkten $(1 - \mu, 0)$ bzw. $(-\mu, 0)$ befinden. Für die Anfangswerte

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0.994, \\ y_1'(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, \\ y_2'(0) &= -2.0015851063, \\ x_{\text{end}} &= 17.0652165602 \end{aligned}$$

ergibt sich ein geschlossener sogenannter Arenstorf-Orbit, eine periodische Lösung mit der Periode x_{end}.

AWA 4: Modell für Nervenimpulse: Es bedeuten:

$x(t)$: Membranpotential
$y(t)$: Aktivierbarkeit der Nervenzelle
Die zugehörige AWA lautet:

$$\begin{array}{rclcrcr} \dot{x} &=& 3(y + x - x^3/3 - 1.3) & , & x(0) &=& -1.03 \\ \dot{y} &=& -(x - 0.7 + 0.8y)/3 & , & y(0) &=& 2.16 \\ t_0 &=& 0 \quad , \quad t_e = 30 & , & m &=& 60 \end{array}$$

Literatur: R. Seydel, R. Bulirsch, *Vom Regenbogen zum Farbfernsehen* (1986), Springer Verlag.

Plotten und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den verschiedenen Verfahren!