Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte SS 07

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 8 , Abgabe: 08.06.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Sei $w(x) = x^2$ und $x_k = -1 + \frac{2k}{n-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Bestimmen Sie für $n = 4$ eine Integrationsformel der Form

$$\tilde{I}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k f(x_k),$$

so dass Polynome vom Grad ≤ 3 auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit der Gewichtsfunktion $w(x)$ exakt integriert werden.

Aufgabe 24: (4 Punkte)
Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ soll durch die Differenzenquotienten

(a) $T(h) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$

(b) $T(h) = \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h))$

berechnet werden. Bestimmen Sie $f'(1)$ nach (a) und (b) für $f(x) = e^x$ mittels Extrapolation zu den Schrittweiten $h_0 = 0.2$, $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$.

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Die (zusammengesetzte) Mittelpunktsregel lautet:

$$M_h = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k + \frac{h}{2}), \quad x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Zeigen Sie: Ist $f \in C^2[a, b]$, so gilt die Abschätzung

$$|M_h - I| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \operatorname*{Max}_{[a,b]} |f''(x)|.$$

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Berechnen Sie für $n = 2, 3$ das Integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$$

mit der Formel von Gauß-Legendre mit der Gewichtsfunktion $\omega(x) = 1$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung.