

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 7 , Abgabe: 25.05.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 19: (4 Punkte)Sei $V = C[-1, 1]$ versehen mit dem inneren Produkt

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)x^2 dx$$

und der Norm $\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$.Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $\Pi_2 = \text{span}\{1, x, x^2\}$ und bestimmen Sie das Proximum von x^4 in Π_2 . Skizzieren Sie das Proximum und die Funktion x^4 .**Aufgabe 20:** (4 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2(\varphi)} d\varphi$$

mit $k^2 = 0.84$. ($I = 4.60262252$)

- (a) nach der zusammengesetzten Trapezregel mit $h = \pi/8$,
- (b) nach der zusammengesetzten Simpsonregel mit $h = \pi/8$.

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Transformation von $[0, 2\pi]$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$.**Aufgabe 21:** (4 Punkte)

Es ist

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi = 3.141592653589793\dots$$

Bestimmen Sie π näherungsweise, indem Sie für das angegebene Integral zwei Romberg-Schritte von Hand (mit dem Taschenrechner) ausführen (Schrittweiten $h_i = \frac{1}{2^i}$, $i = 0, 1, 2$).**Aufgabe 22:** (Programmieraufgabe, Abgabe 8.6.2007, 4 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm

```
romberg (f, a, b, relerr)
```

zur Romberg-Integration einer Funktion f in $[a, b]$. Das Programm soll abbrechen, wenn in der letzten Zeile des Romberg-Schemas zweimal hintereinander gilt

$$|T_{i,k} - T_{i,k-1}|/T_{ik} \leq \text{relerr}.$$

Es sollen $k = 4$ Spalten und mindestens $i = 4$ und höchstens $i = 10$ Zeilen des Romberg-Schemas berechnet werden. Ihr Programm soll mit der minimalen Zahl von Funktionsauswertungen auskommen. Testen Sie Ihr Programm für $relerr \leq 10^{-5}$ an den Beispielen:

$$(a) \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi \approx 3.141592653589793$$

$$(b) \int_0^{2/\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2(\varphi)} d\varphi \approx 0.3917436582052818 \quad \text{für } k^2 = 0.84$$

$$(c) \int_1^2 \frac{dx}{(x + 0.05)^4} \approx 0.24925422405550246$$

$$(d) \int_0^1 x^{3/2} dx = 0.4$$

Hinweis: Die offene Programmierstunde findet am Dienstag, den 05.06.2007 statt.