Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte SS 07

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 5 , Abgabe: 11.05.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 16: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Raum $C[a,b]$ bezüglich der Normen $\| \cdot \|_2$ und $\| \cdot \|_1$ *nicht* vollständig ist. Untersuchen Sie dazu die Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad -1 \le x \le -\frac{1}{n}\,, \\ nx & \text{für} \quad -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n}\,, \\ 1 & \text{für} \quad \frac{1}{n} \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Betrachten Sie in $V = C[0,1]$ mit der Norm $\| \cdot \|_\infty$ die Teilmenge

$$T = \{u \in C[0,1] \mid u(0) = 0\}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n(x) = x^n$, eine Minimalfolge für das Element $v \in V$ mit $v(x) \equiv 1$ ist, welche <u>nicht</u> gegen ein Element aus T konvergiert.

Aufgabe 18: (4 Punkte)

(a) In dem normierten Vektorraum $(V, \| \cdot \|)$ sei $B = \{u \in V \mid \|u\| \le 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel. Man zeige, dass <u>ein</u> Proximum $\tilde{u} \in B$ an ein Element $v \in V$ gegeben ist durch

$$\tilde{u} = \left\{ \begin{array}{ccc} v & , & \text{falls} \quad v \in B \\ v/\|v\| & , & \text{falls} \quad v \notin B \end{array} \right\}.$$

(b) Sei $V = \mathbb{R}^2$ versehen mit der Norm $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$. Skizzieren Sie die Menge $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \le 1\}$ und bestimmen Sie <u>alle</u> Proxima $\tilde{x} \in B$ an $v = (2,0)^T$ und $v = (1,1)^T$.