Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte SS 07

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 4 , Abgabe: 04.05.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie mit dem Satz von Gerschgorin, dass A genau einen Eigenwert mit negativem Realteil hat.

(b) Bestimmen Sie drei paarweise disjunkte Gerschgorin-Kreisscheiben, in denen jeweils ein Eigenwert von A liegt.

(c) Geben Sie eine möglichst gute Abschäzung für den größten Eigenwert.

Hinweis zu b) u. c): Betrachten Sie $A' = D^{-1}AD$ mit $D = \mathrm{diag}(1, c, 1)$, $c > 0$.

Aufgabe 13: (6 Punkte)
Gegeben sei die $(n \times n)$-Matrix

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \mathbf{O} \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \mathbf{O} & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

und die $(n \times n)$–Matrix F.
Zeigen Sie: Für die Eigenwerte $\lambda_i(\epsilon)$ der gestörten Matrix $C(\lambda) + \epsilon F$ gilt für genügend kleines ϵ die Abschätzung

$$|\lambda_i(\epsilon) - \lambda| \leq |\epsilon^{1/n}|(1 + \|F\|_\infty) .$$

Zeigen Sie durch spezielle Wahl der Matrix F, dass der Fall $\lambda_i(\epsilon) - \lambda = O(\epsilon^{1/n})$ tatsächlich auftritt.
Hinweis: Ähnlichkeitstransformation mit $D = \mathrm{diag}\ (1, d, d^2, \ldots, d^{n-1})$, $d = \epsilon^{1/n}$. Benutzen Sie den Satz von Gerschgorin.

Aufgabe 14: (6 Punkte)
Überlegen Sie, dass die folgenden Ausdrücke Normen für die $\mathbb{R}$-Vektorräume V sind und entscheiden Sie dann, welche dieser Normen streng sind.

(a) $V = C^1[a,b]\ ;\ \|f\| = \left(\int\limits_a^b f'(x)^2 dx\right)^{1/2} + \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$

(b) $V = C^2[a,b]\ ;\ \|f\| = \left(\int\limits_a^b f''(x)^2\, dx\right)^{1/2} + |f(a)| + |f(b)|$

(c) $V = C^n[a,b]\ ;\ \|f\| = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \int\limits_a^b f^{(k)}(x)^2 dx\right)^{1/2}$

(d) $V = \left\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_1 = 0\ ,\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| < \infty\right\}\ ;\ \|x\| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|$

Aufgabe 15: (Programmieraufgabe, Abgabe 11.05.2007, 4 Punkte)
Auf der Homepage zur Vorlesung finden Sie bei den Übungsaufgaben einen Link auf die Datei "C.matrix". Die Datei enthält eine 80×80-Matrix C. Programmieren Sie den QR-Algorithmus und testen Sie ihn, indem Sie alle Eigenwerte der Matrix C berechnen. Wie kann man eine geeignete Abbruchbedingung für den Algorithmus formulieren?

Hinweis: Sie können die QR-Zerlegung `qr` von Matlab benutzen. Speichern Sie die Datei `C.matrix` auf Ihren Rechner und laden Sie sie durch den Befehl `C=load C.matrix;` in Ihr Matlab-File.

Hinweis: Die nächste Programmierstunde findet am Dienstag, den 8. Mai statt!