Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 2 , Abgabe: 20.04.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 5: (6 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & & \mathbf{O} \\ \gamma_2 & \delta_2 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ \mathbf{O} & & & \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie: λ ist Eigenwert von A genau dann, wenn $-\lambda$ Eigenwert von B ist:

$$B := \begin{pmatrix} -\delta_1 & \gamma_2 & & & \mathbf{O} \\ \gamma_2 & -\delta_2 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ \mathbf{O} & & & \gamma_n & -\delta_n \end{pmatrix}$$

Hinweis: Betrachten Sie die 3-Term-Rekursion für das charakteristische Polynom.

(b) Es gelte

$$\begin{aligned} \delta_i &= -\delta_{n+1-i} && (i = 1, \ldots, n)\ , \\ \gamma_i &= \gamma_{n+2-i} && (i = 2, \ldots, n)\ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Mit λ ist auch $-\lambda$ Eigenwert von A.

(c) Es gelte

$$\begin{aligned} \delta_i + \delta_{n+1-i} &= 2c \quad , \quad c \in \mathbb{R} && (i = 1, \ldots, n)\ , \\ \gamma_i &= \gamma_{n+2-i} \quad , && (i = 2, \ldots, n)\ . \end{aligned}$$

Was kann man über die Lage der Eigenwerte von A aussagen?

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Die QR-Zerlegung einer invertierbaren $(n \times n)$-Matrix ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Diagonalmatrix D mit $|D_{ii}| = 1$, $i = 1, \ldots, n$, d.h. falls $A = QR = Q'R'$, so gilt $Q' = QD$ und $R = DR'$.

Aufgabe 7: (Programmieraufgabe, Abgabe 20.04.07, 4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 16 & -104 \\ 0 & 2 & -12 & 42 \\ 0 & 9 & -16 & 105 \\ 1 & -2 & 13 & -42 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Erweitern Sie das Programm zu Aufgabe 4 zu einem Programm `potenzmethode(A,n,x0,epsilon)`, welches eine $(n \times n)$-Matrix A, die Dimension n, einen Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und eine Fehlertoleranz ϵ einliest und mit Hilfe der Potenzmethode den betragsmässig größten Eigenwert λ_1 der Matrix A und den zugehörigen Eigenvektor x berechnet. Die Genauigkeit ϵ ist erreicht, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Iterationen für den Eigenwert λ_1 im Absolutbetrag kleiner als ϵ ist. Berechnen Sie mit dem Programm eine Näherung für den betragsmässig größten Eigenwert der Matrix A mit zugehörigem Eigenvektor.

(b) Benutzen Sie die inverse Potenzmethode zur Berechnung des zweitgrößten Eigenwertes mit zugehörigem Eigenvektor. Verwenden Sie $\mu = 10$ und $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$.

Aufgabe 8: (Programmieraufgabe, Abgabe 27.04.07, 4 Punkte)
Man berechne sämtliche Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren x_i der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 1 & & & \mathbf{O} \\ 1 & 12 & 1 & & \\ & 1 & 8 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ \mathbf{O} & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der in der Vorlesung dargelegten Methode und dem Verfahren von MAEHLY.
<u>Hinweis:</u> Nach Aufgabe 5 liegen die Eigenwerte symmetrisch zu $\lambda_3 = 8$.