

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“Übungsblatt 11 , Abgabe: 29.06.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 33: (4 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(x) + xy'(x) = 0$$

mit den Anfangswerten $y(1) = 1$ und $y'(1) = 2$.

- Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung. Geben Sie auch die transformierten Anfangsdaten an.
- Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren mittels zweier Schritte und mit dem Heun-Verfahren mittels eines Schritts eine Näherung für $y(2)$.

Aufgabe 34: (4 Punkte)

Gegeben sei das Mehrschrittverfahren (MSV)

$$y_{j+2} - (1 + \alpha)y_{j+1} + \alpha y_j = \frac{h}{2} [(3 - \alpha)f_{j+1} - (1 + \alpha)f_j]$$

mit $f_j = f(x_j, y_j)$.

- Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Ordnung des MSV's.
- Für welche α ist das MSV stabil?

Aufgabe 35: (4 Punkte)

Die Lösungen der Differenzengleichung

$$z_{j+2} = z_{j+1} + z_j, \quad j \geq 0, \quad z_0 = 0, \quad z_1 = 1$$

sind die Fibonacci-Zahlen.

- Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $z_{j+2} = z_{j+1} + z_j$ durch den Ansatz $z_j = c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j$, $c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie dann die spezielle Lösung mit $z_0 = 0, z_1 = 1$.
- Die Kapazität eines Informationskanals ist gegeben durch die Gleichung

$$C = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \log z_j.$$

Berechnen Sie C .

Aufgabe 36: (4 Punkte)

Die AWA

$$\begin{aligned}y'(x) &= \mu y(x), & x \geq 0, \mu \in \mathbb{R} \\y(0) &= 1\end{aligned}\tag{1}$$

werde durch die Methode

$$y_{k+2} - y_k = 2hf_{k+1}\tag{2}$$

gelöst.

- a) Zeigen Sie, dass die Lösung y_k von (2) die Form

$$y_k = A(\lambda_1(h))^k + B(\lambda_2(h))^k$$

hat, wobei

$$\begin{aligned}\lambda_1(h) &= e^{\mu h} + \mathcal{O}(h^3) \\ \lambda_2(h) &= -e^{-\mu h} + \mathcal{O}(h^3)\end{aligned}$$

gilt.

- b) Welches $\lambda_r(h)$ entspricht der Lösung von (1)?
c) Wie verhält sich die Approximation y_k , falls μ eine große negative Zahl ist?

Die Klausur findet am Mittwoch, den 4.7.2007 von 13:00 bis 16:00 Uhr in den Hörsälen M1 und M2 statt. Erlaubte Hilfsmittel sind ein nicht programmierbarer Taschenrechner und ein einseitig beschriebenes DinA4 Blatt Formelsammlung.