

**Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“**Übungsblatt 11 , Abgabe: 29.06.2007 , 8.00 Uhr

---

---

**Aufgabe 33:** (4 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(x) + xy'(x) = 0$$

mit den Anfangswerten  $y(1) = 1$  und  $y'(1) = 2$ .

- Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung. Geben Sie auch die transformierten Anfangsdaten an.
- Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren mittels zweier Schritte und mit dem Heun-Verfahren mittels eines Schritts eine Näherung für  $y(2)$ .

**Aufgabe 34:** (4 Punkte)

Gegeben sei das Mehrschrittverfahren (MSV)

$$y_{j+2} - (1 + \alpha)y_{j+1} + \alpha y_j = \frac{h}{2} [(3 - \alpha)f_{j+1} - (1 + \alpha)f_j]$$

mit  $f_j = f(x_j, y_j)$ .

- Bestimmen Sie für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Ordnung des MSV's.
- Für welche  $\alpha$  ist das MSV stabil?

**Aufgabe 35:** (4 Punkte)

Die Lösungen der Differenzgleichung

$$z_{j+2} = z_{j+1} + z_j, \quad j \geq 0, \quad z_0 = 0, \quad z_1 = 1$$

sind die Fibonacci-Zahlen.

- Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzgleichung  $z_{j+2} = z_{j+1} + z_j$  durch den Ansatz  $z_j = c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j$ ,  $c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie dann die spezielle Lösung mit  $z_0 = 0, z_1 = 1$ .
- Die Kapazität eines Informationskanals ist gegeben durch die Gleichung

$$C = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \log z_j.$$

Berechnen Sie  $C$ .

**Aufgabe 36:** (4 Punkte)

Die AWA

$$\begin{aligned}y'(x) &= \mu y(x), & x \geq 0, \mu \in \mathbb{R} \\y(0) &= 1\end{aligned}\tag{1}$$

werde durch die Methode

$$y_{k+2} - y_k = 2hf_{k+1}\tag{2}$$

gelöst.

- a) Zeigen Sie, dass die Lösung  $y_k$  von (2) die Form

$$y_k = A(\lambda_1(h))^k + B(\lambda_2(h))^k$$

hat, wobei

$$\begin{aligned}\lambda_1(h) &= e^{\mu h} + \mathcal{O}(h^3) \\ \lambda_2(h) &= -e^{-\mu h} + \mathcal{O}(h^3)\end{aligned}$$

gilt.

- b) Welches  $\lambda_r(h)$  entspricht der Lösung von (1)?  
c) Wie verhält sich die Approximation  $y_k$ , falls  $\mu$  eine große negative Zahl ist?

**Die Klausur findet am Mittwoch, den 4.7.2007 von 13:00 bis 16:00 Uhr in den Hörsälen M1 und M2 statt. Erlaubte Hilfsmittel sind ein nicht programmierbarer Taschenrechner und ein einseitig beschriebenes DinA4 Blatt Formelsammlung.**