Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte SS 07

Übungen zur Vorlesung „Höhere Numerische Mathematik“

Übungsblatt 1 , Abgabe: 13.04.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Bestimmen Sie für die Matrizen

(a) $A = uv^T, \quad u, v \in \mathbb{R}^n,$

(b) $Q = I - 2ww^T, \quad w^T w = 1, \quad w \in \mathbb{R}^n,$

(c)
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte λ_i und die Vielfachheiten $\sigma(\lambda_i)$ und $\rho(\lambda_i)$ des charakteristischen Polynoms $\varphi(\lambda)$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei A die (n, n)-Matrix mit

$$a_{i,i} = 2, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = -1, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Alle anderen Elemente von A seien 0 (vgl. Aufgabe 10, Einführung in die Numerische Mathematik). Zeigen Sie, dass A die folgenden Eigenwerte hat:

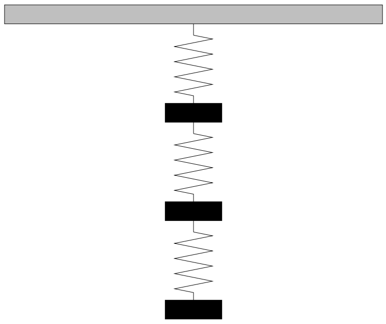
$$\lambda_\ell = 4 \sin^2 \left(\frac{\ell \pi}{2n+2} \right), \quad \ell = 1, \ldots, n.$$

Hinweis: Machen Sie für einen Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^n$ den Ansatz $x_i = \sin(ci)$, $i = 1, \ldots, n$ und bestimmen Sie c. Benutzen Sie das Additionstheorem für den Sinus.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Sei A eine reelle, reguläre und symmetrische (n, n)-Matrix und X eine symmetrische und positiv definite (n, n)-Matrix. Zeigen Sie: XAX hat die gleiche Anzahl positiver Eigenwerte wie A.

Hinweis: Betrachten Sie für $s \in [0, 1]$ $X(s) := E_n + s(X - E_n)$ und überlegen Sie sich das Vorzeichen der Eigenwerte der Matrix $X(s)AX(s)$.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe 13.04.07, 4 Punkte)
Bei der Berechnung der Grundfrequenzen und Schwingungsformen eines linearen Schwingungssystems der Form:



stellt sich die Aufgabe der Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

mit $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

(a) Berechnen Sie für $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Potenzmethode 4 Iterationen zur Bestimmung des größten Eigenwertes von A.

(b) Bestimmen Sie für $c_1 = 8$, $c_2 = 3$, $c_3 = 11$ den größte Eigenwert und zugehörigen Eigenvektor der Matrix A. Benutzen Sie a) zur Berechnung einer Näherung und vergleichen Sie die Resultate. Erklären Sie insbesondere die schlechte Konvergenz des Eigenvektors.

Übungstermine (ab Montag, 16.4.2007):

Gruppe 1:	Mo.	8.00 - 10.00 Uhr	SR 1	BK 83
Gruppe 2:	Mo.	10.00 - 12.00 Uhr	SR 1	BK 83
Gruppe 3:	Mo.	12.00 - 14.00 Uhr	SR 1	BK 82

Bitte geben Sie die Nummer Ihrer Gruppe auf den abzugebenden Lösungen der Übungsaufgaben an.

Informationen zu der Vorlesung, wie z.B. die aktuellen Übungsaufgaben, Klausurtermine etc., finden Sie unter

`http://wwwmath1.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/Numerik2_SS07/`