Übungen zur Vorlesung "Numerik I"

Übungsblatt 4, Abgabe: Fr, 11.11.1994, 11.00 Uhr

Aufgabe 13: (2 + 2 Punkte)
Formen Sie die Ausdrücke

(a) $y = \frac{1}{1+2z} - \frac{1-z}{1+z}$

(b) $y = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

so um, daß für kleine (positive) x keine Auslöschung auftritt.

Aufgabe 14: (2 + 1 Punkte)
Sei $f : I\!R^3 \to I\!R$ gegeben durch $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(x_2 - x_3)^2$.

(a) Bestimmen Sie die Verstärkungsfaktoren $k_{1i}(x)$, $i = 1, 2, 3$.

(b) Sei $\tilde{x} = x + \Delta x$ eine Näherung von $x = (2.00, 1.00, 0.98)$ mit $|\Delta x_i| \leq 0.005$.
Schätzen Sie mit Hilfe der Verstärkungsfaktoren den relativen Fehler von f ab.

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Der Ausdruck $y = \ell n(x - \sqrt{x^2 - 1})$ soll für $x = 30$ berechnet werden. Die Wurzel $w = \sqrt{x^2 - 1}$ werde hierbei einer 5-stelligen Tafel entnommen:

$$w = \sqrt{899} \approx 29.983 \ .$$

(a) Wie groß wird der absolute Fehler?

(b) Man stabilisiere den Ausdruck durch Umformung und bestimme den absoluten Fehler bei der Auswertung des umgeformten Ausdruckes.

Hinweis: Betrachten Sie geeignete Funktionen $f(w)$ mit $w = \sqrt{x^2 - 1}$.

Aufgabe 16: (Programmieraufgabe)
Zu berechnen sind die Integrale

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 e^x x^n dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \ .$$

(a) Man zeige $0 < I_{n+1} < I_n$, $\frac{1}{e(n+1)} < I_n < \frac{1}{n+1}$.

(b) Man beweise die Rekursion

$$I_{n+1} + (n+1)I_n = 1\ , \quad I_0 = \frac{1}{e}\,(e-1)\ . \qquad (*)$$

(c) Berechnen Sie mittels $(*)$ die Zahlen I_0 bis I_{30} und interpretieren Sie das Ergebnis.

(d) Nach (a) gilt $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = 0$. Setzen Sie daher $I_n = 0$ für $n = 5, 10, 15, 20, 30$ und berechnen Sie jeweils nach der Formel die Zahlen $I_{n-1}, I_{n-2}, \ldots, I_0$ rückwärts.

Erklären Sie die sehr guten Werte für I_0.

Übungen zur Vorlesung "Numerik I"

Übungsblatt 5, Abgabe: 18.11.1994, 11.00 Uhr

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Mit $\|\cdot\|$ werde eine Vektornorm des $I\!R^n$ und die zugeordnete Matrix-Norm bezeichnet. Beweisen Sie:

(a) $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ für alle (n,n)-Matrizen A, B

(b) $\|A\| = \min\{c \in I\!R \mid \|Ax\| \le c\|x\| \quad \text{für alle } x \in I\!R^n\}$.

Aufgabe 18: (3 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie cond(A) für die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe 19: (3+1 Punkte)
Die (n,n)-Matrix A sei diagonaldominant, d.h. es gelte $|a_{ii}| > \sum_{k\neq i} |a_{ik}|$ für $i = 1, \dots, n$.

(a) Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|Ax\|_\infty \ge c\|x\|_\infty \quad \text{für} \quad x \in I\!R^n, \quad c := \min_{i=1,\dots,n} \Big(|a_{ii}| - \sum_{k\neq i} |a_{ik}|\Big)$$

und folgern Sie daraus die Abschätzung

$$\text{cond}_\infty(A) \le \|A\|_\infty / c\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\|x\|_\infty = |x_r|$ und $\|Ax\|_\infty \ge |(Ax)_r|$

(b) Bei der Spline-Interpolation (§17) begegnet man der tridiagonalen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ \alpha_2 & 1 & \beta_2 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & & \beta_{n-1} \\ & & & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \alpha_i, \beta_i > 0 \\ \beta_1, \alpha_n \le 1/2, \\ \alpha_i + \beta_i = 1/2 \\ (i = 2, \dots, n-1) \end{array}$$

Geben Sie eine Abschätzung für cond$_\infty(A)$ an.

Aufgabe 20: (Programmieraufgabe)

Schreiben Sie ein Programm $\mathrm{cond}(A, n)$ zur Berechnung der Konditionszahl einer regulären (n, n)-Matrix A zur Norm $\|\cdot\|_\infty$. Testen Sie Ihr Programm an der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.29412 & 0.41176 & 0.52941 & 0.58824 \\ 0.42857 & 0.57143 & 0.71429 & 0.64286 \\ 0.36842 & 0.52632 & 0.42105 & 0.36842 \\ 0.38462 & 0.53846 & 0.46154 & 0.38462 \end{pmatrix}.$$

Übungen zur Vorlesung "Numerik I"

Übungsblatt 6, Abgabe: 25.11.1994, 11.00 Uhr

Aufgabe 21: (1+2+2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Abbildung. Ein Maß für die Kondition des Problems "Berechne $y = f(x)$" ist nach §2:

$$\begin{aligned} k_{abs}(x) &= \|f'(x)\| && \text{(absolute Kondition)}\,, \\ k_{rel}(x) &= \|f'(x)\| \tfrac{\|x\|}{\|f(x)\|} && \text{(relative Kondition)} \end{aligned}$$

für irgendeine Vektornorm $\|\cdot\|$ und zugeordnete Matrix-Norm.

(a) Sei A eine reguläre (n,n)-Matrix und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $f(b) = A^{-1}b$ für $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

$$k_{abs}(b) \le \|A^{-1}\|\,, \quad k_{rel}(b) \le \|A\|\,\|A^{-1}\| = \text{ cond }(A)\,.$$

(b) Sei $g : G\ell(n) \to G\ell(n)$ die Abbildung $g(A) = A^{-1}$ für $A \in G\ell(n)$ ($G\ell(n)$ ist die Menge der regulären (n,n)-Matrizen).

Zeigen Sie

$(*)\qquad g'(A)C = -A^{-1}CA^{-1}$ für $C \in G\ell(n)$.

Hinweis: Differenzieren Sie die Identität $(A+tC)^{-1}(A+tC) = I$ nach $t \in \mathbb{R}$ und beachten Sie $g'(A)C = \frac{d}{dt}(A+tC)^{-1}|_{t=0}$.

(c) Sei $b \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt und sei $f : G\ell(n) \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $f(A) = A^{-1}b$.

Zeigen Sie

$$\begin{aligned} k_{abs}(A) &\le \|A^{-1}\|\,\|x\|\,, \quad x = A^{-1}b\,, \\ k_{rel}(A) &\le \text{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| \quad . \end{aligned}$$

Hinweis: Berechnen Sie $f'(A)C$ für $C \in G\ell(n)$ mittels $(*)$ und benutzen Sie $\|f'(A)\| = \max\{\|f'(A)C\| \mid \|C\| = 1\}$.

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Berechnen Sie mit dem Householder-Verfahren (Handrechnung) die Lösung des LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 23: (2+3 Punkte)
Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}$ des linearen Ausgleichsproblems ($m = 2,\ n = 1$)

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \|y - Ax\|_2\,, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mittels

(a) der Normalgleichungen,

(b) der QR-Zerlegung von A.

Bestimmen Sie jeweils das Residuum.

Aufgabe 24: (Programmieraufgabe) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\min\{\|y - Ax\|_2 \mid x \in \mathbb{R}^n\} \quad \text{für} \quad y \in \mathbb{R}^m$$

und A (m,n)-Matrix mit $m > n$. Wenden Sie das Programm in §6 zur QR-Zerlegung von A auf die erweiterte Matrix $(A|y)$ an. Testen Sie das Programm an den Daten:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -\ 0.5 \\ -\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{ist optimal ,}$$

(b) Der Gezeitenwasserstand in der Nordsee werde in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) durch

$$H(t) = h + a\sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + b\cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

mit unbekannten Konstanten h, a, b beschrieben. Folgende Meßwerte liegen vor:

t	0	2	4	6	8	10	Stunden
$H(t)$	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

Bestimmen Sie h, a, b aus dem überbestimmten Gleichungssystem $H(t_i) = h_i$, $t_i = 0, 2, 4, 6, 8, 10$.

Abgabe von Aufgabe 24: Fr, 2.12.94

Übungen zur Vorlesung "Numerik I"

Übungsblatt 7, Abgabe: 02.12.1994, 11.00 Uhr

Aufgabe 22 (4 Punkte): Bearbeiten Sie die in Übung 6 gestellte Aufgabe 22.

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Ein Versuch mit m Messungen führt auf das lineare Ausgleichsproblem mit $A \in M(m,n)$. A liege in QR-Zerlegung $A = QR$ vor. Es werde

a) ein (erster) Meßwert hinzugeführt oder

b) der (erste) Meßwert weggelassen.

Geben Sie Formeln zur Berechnung von $\tilde{Q}\tilde{R} = \tilde{A}$

$$\text{für} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \omega^T \\ A \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} z^T \\ \tilde{A} \end{pmatrix}$$

unter Benutzung der QR-Zerlegung von A an.

Aufgabe 26: (3 Punkte)
Bestimmen Sie die lineare Ausgleichsgerade $y = \alpha + \beta t$ zu den Meßpunkten

t_i	-1	0	2
y_i	-1	1.2	4.9

Aufgabe 27: (3 Punkte)
Berechnen Sie die optimale kubische Funktion $y = \alpha t + \beta t^3$ zu den Meßpunkten

t_i	-1	1	2
y_i	-1.3	1.7	6

Übungen zur Vorlesung "Numerik I"

Übungsblatt 8, Abgabe: 09.12.1994, 11.00 Uhr

Aufgabe 28: (3 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $|g'(x)| \leq 0.5$ für $x \in \mathbb{R}$. Der Fixpunkt $\overline{x}$ von g soll mit einem absoluten Fehler kleiner gleich $0.5 \cdot 10^{-6}$ berechnet werden. Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = g(x_k)$ ergibt

$$x_4 = 0.51495 \quad und \quad x_5 = 0.51519 \; .$$

Wieviele zusätzliche Iterationen muß man ausführen, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen?

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Für $\alpha > 0$ sei

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -|x|^\alpha & \text{für} \quad x < 0 \; . \end{cases}$$

Sei $x_0 > 0$ Startwert des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Nullstelle $\overline{x} = 0$ von f.

(a) Für welche $\alpha > 0$ konvergiert das Newton-Verfahren?

(b) Zeigen Sie, daß das Newton-Verfahren für $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha \neq 1$, nur linear konvergiert.

Aufgabe 30: (Programmieraufgabe)

(a) Bei der Bahnbestimmung von Planeten ist die "KEPLERsche Gleichung" zu lösen: Gesucht wird die "exzentrische Anomalie" $\overline{x}$ als Lösung der Gleichung

$$x = g(x) = e \sin(x) + \frac{2\pi}{u} \, t \; .$$

Dabei ist U die Umlaufzeit, t die seit dem Periheldurchgang vergangene Zeit in Tagen und e die numerische Exzentrizität der Bahnellipse. Für die realistischen Werte $e = 0.1$ und $2\pi t/U = 0.85$ berechne man die Iterationsfolge $x_{k+1} = g(x_k) \quad (k = 1, \ldots, 8)$, $x_0 = 0.85$, und vergleichen die Quotienten $|x_{k+1} - x_k|/|x_k - x_{k-1}|$ mit $g'(x_8)$.

(b) Programmieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle $\overline{x}$ der Funktionen

(1) $f(x) = 2x - \tan x$ bzw.
$f(x) = x - \arctan(2x)$.

(2) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} + 0.4 - 1.74\ell n(R\sqrt{x})$, $R = 10^5$.
Diese Funktion tritt bei der Strömung in einem Rohr auf, wobei R die Reynoldszahl und x die Reibungskonstante bedeutet.

Berechnen Sie in (1), (2) die Quotienten $|x_{k+1} - x_k|/|x_k - x_{k-1}|$.
Abbruchkriterien für (2): $|f(x_k)| \leq 10^{-6}$

Freiwillige CHAOS-Aufgabe:

Sei $g(x) = rx(1-x)$ die Parabel-Abbildung mit dem Parameter $r \in [0,4]$.
Überlegen Sie, daß $g(D) \subset D$ für $D = [0,1]$, und betrachten Sie die Iteration

$$x_{x+1} = g(x_k) = rx_k(1-x_k) \; .$$

Für $1 < r < 3$ erfüllt der Fixpunkt $x = x(r) = 1 - 1/r$ die Bedingung $|g'(x(r))| < 1$ des Fixpunktsatzes. Berechnen Sie nun die Iterierten x_k, $200 \leq k \leq 250$, für $x_0 = 0.5$ und

$$(1) \quad r = 3.2 \qquad (2) \quad r = 3.5 \qquad (3) \quad r = 3.56 \qquad (4) \quad r = 3.839 \; .$$

Die Iterierten x_k haben in (i) die Periode 2^i $(i = 1, 2, 3)$, in (4) die Periode 3.

Übungen zur Vorlesung "Numerik I"

Übungsblatt 9, Abgabe: 16.12.1994, 11.00 Uhr

Aufgabe 31: (3+5 Punkte)

(a) Konvergenzverbesserung nach AITKEN:
Die Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ sei linear konvergent gegen $\overline{x} \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$x_{k+1} - \overline{x} = (q + \varepsilon_k)(x_k - \overline{x}) , \quad |q| < 1 , \quad \varepsilon_k \to 0 .$$

Zeigen Sie: Gilt $x_k \neq \overline{x}$, so ist für genügend großes k die Folge

$$z_k := x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

erklärt und es gilt

$$\lim_{k \to \infty} \frac{z_k - \overline{x}}{x_k - \overline{x}} = 0 .$$

Hinweis: Setzen Sie $e_k = x_k - \overline{x}$ und überlegen Sie

$$x_{k+1} - x_k = e_{k+1} - e_k , \quad x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = e_{k+2} - 2_{k+1} + e_k .$$

(b) Verfahren von STEFFENSEN: Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und sei $\overline{x}$ ein Fixpunkt von f von $|f'(\overline{x})| < 1$. Durch Kombination der Fixpunktiteration $x_{k+1} = f(x_k)$ mit dem Verfahren von AITKEN in (a) erhält man die Iteration

$$x_{k+1} = g(x_k) := x_k - \frac{(f(x_k) - x_k)^2}{f(f(x_k)) - 2f(x_k) + x_k} .$$

Zeigen Sie, daß dieses Verfahren (mindestens) die Ordnung $p = 2$ hat:

Hinweis: Sei o.E. $\overline{x} = 0$. Benutzen Sie $f(x) = f'(0)x + \mathrm{O}(x^2)$ und zeigen Sie $g(x) = \mathrm{O}(x^2)$.

Berechnen Sie $z_k \ (k = 0, 1, 2, 3)$ für die Iterationsfolge $x_{k+1} = g(x_k) = \exp(-x_k)$, $x_0 = 0.55$.

Aufgabe 32: (5 Punkte)
Beweisen Sie, daß das Newton-Verfahren zur Funktion

$$f(x) = x^n - a , \qquad a > 0 , \quad n \geq 2 ,$$

für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die positive Nullstelle $\overline{x} = a^{1/n}$ von f konvergiert. Überlegen Sie dazu, daß gilt

(a) $x_1 \geq \overline{x}$ für alle $x_0 > 0$.

(b) $\overline{x} < x_{k+1} < x_k$ für alle $k \geq 1$ und $x_k > \overline{x}$.

Hinweis: Diskutieren Sie die Newton'sche Iterationsfunktion und deren Ableitung.

Aufgabe 33: (3+2 Punkte)
Sei A eine positiv definite Matrix. Dann gibt es genau eine positive definite Matrix X mit $X^2 = A$. Man schreibt $X = A^{1/2}$. Zur Berechnung von X löse man das Gleichungssystem $F(X) = 0$ mit $F(X) = X^2 - A$.

(a) Zeigen Sie, daß das Newton-Verfahren für $F(X) = 0$ die Form

$$X_{k+1}X_k + X_kX_{k+1} = A + X_k^2$$

hat.

(b) Berechnen Sie eine Approximation X_1 für $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}^{1/2}$ durch einen Schritt des Newton-Verfahrens mit der Startnäherung $X_0 = I$ und zeigen Sie, daß

$$\|X_1^2 - A\|_\infty \leq \frac{1}{16} \; .$$

Aufgabe 34: (Programmieraufgabe) Programmieren Sie das Newton-Verfahren in $\mathbb{R}^n$ zur Berechnung der Nullstelle $\overline{x}$ einer C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Lösen Sie die nichtlinearen Gleichungssysteme

(a) $x^2 + y^2 + 0.6y = 0.16$, $x^2 - y^2 + x - 1.6y = 0.14$
Startdaten: $(0.6, 0.25)^T$

(b)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1.2 \cdot 10^5 \cdot x_2^{-1} - 1 \\ 10^{10}(x_2 + x_3)(x_1x_2x_3)^{-1} - 40 \\ 2 \cdot 10^5 x_1^{-1} - 2 \cdot 10^4(x_2 + x_3)(x_2x_3)^{-1} - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Die Variablen x_1, x_2, x_3 sind die Widerstände einer elektrischen Schaltung.

$$\begin{array}{lll} \text{Startdaten} & : & x_1 = x_2 = 10^5 \; , \qquad x_3 = 10^4 \\ \text{Lösung} & : & x_1 = 0.44139 \cdot 10^5 \; , x_2 = 0.12 \cdot 10^6 \; , \\ & & x_3 = 0.59445 \cdot 10^4 \; . \end{array}$$

Abgabe von Aufgabe 34: 13.1.1995

Übungen zur Vorlesung "Numerik I"

Übungsblatt 10, Abgabe: 20.01.1995, 11.00 Uhr

Aufgabe 35: (3 Punkte)
Für das Polynom $p(x) = x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36$ berechne man mit Hilfe des HORNER-Schemas die Ableitungen $p^{(i)}(x_0)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, an der Stelle $x_0 = -2$.

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Zur Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 10 & 0.4 \\ 0.4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

führe man ausgehend von $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zwei Schritte des Gesamt- und Einzelschrittverfahrens durch.

Aufgabe 37: (4 Punkte)
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle $(2,2)$-Matrix.

Man zeige, daß zur Lösung von $Ax = b$ das Gesamtschrittverfahren genau dann konvergiert, wenn das Einzelschrittverfahren konvergiert.

Hinweis. Berechne die zugehörigen Spektralradien.

Aufgabe 38: (4 Punkte)
Sei A eine (m,n)-Matrix mit $n \leq m$ und $\text{rang}(A) = n$. Sei $0 < r < \frac{2}{\sigma_1^2}$, wobei σ_1^2 der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.

Zeigen Sie: Die Iteration

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - rA^T(Ax^{(k)} - y)$$

konvergiert für jede Wahl von $x^{(0)}$, y gegen eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - Ax\|_2 \, .$$

Übungen zur Vorlesung "Numerik I"

Übungsblatt 11, Abgabe: 27.01.1995, 11.00 Uhr

Aufgabe 39: (3+1 Punkte)
Betrachten Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

das Gesamtschrittverfahren $x^{(k+1)} = C_G x^{(k)} + d$ mit $C_G = -D^{-1}(L+R),\ d = D^{-1}b$.

(a) Überlegen Sie, daß das starke Zeilensummenkriterium nicht erfüllt ist. Zeigen Sie, daß das GS-Verfahren konvergent ist. Berechnen Sie dazu $\rho(C_G)$.

(b) Berechnen Sie $x^{(1)}$ mit $x^{(0)} = (0,1,1)^T$.

Aufgabe 40: (4 Punkte)
Seien $C_G = -D^{-1}(L+R),\ C_E = (L+D)^{-1}R$ die Matrizen des Gesamt- und Einzelschrittverfahrens.

Man zeige: Falls

$$\sum_{k \neq i} |a_{ki}| < |a_{ii}| \ , \quad i = 1, \ldots, n \ ,$$

so gilt

$$\|C_E\|_\infty \leq \|C_G\|_\infty < 1 \ .$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}^n$, $C_E x$ zeige man induktiv

$$|y_k| \leq \|C_G\|_\infty \|x\|_\infty \ , \quad k = 1, \ldots, n \ .$$

Aufgabe 41: (2 Punkte)
Sei $p \in \prod_3$ das Polynom, das die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an den Stützpunkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 9$ interpretiert.

Bestimmen Sie p mit der Formel von Lagrange.

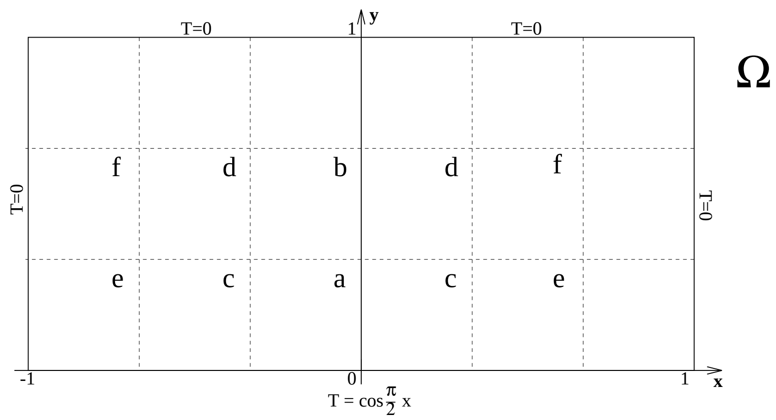
Aufgabe 42: (Programmieraufgabe) (+ 2 Punkte)

Hält man eine wärmeisolierte Platte am Rande auf einer zeitlich konstanten Temperaturverteilung, so stellt sich auch im Innern auf die Dauer eine unveränderliche Temperaturverteilung $T(x,y)$ ein (vgl. Bild), die der Potentialgleichung (partielle Differentialgleichung)

$$\Delta T(x,y) = \partial^2_{xx} T(x,y) + \partial^2_{yy} T(x,y) = 0 \quad \text{für} \quad (x,y) \in \mathring{\Omega}$$

genügt. Falls Ω ein Rechteck ist mit der Temperaturverteilung $T(x,y) = 0$ auf dem Rande $(x,y) \in \partial\Omega$, so lautet die Lösung

$$T(x,y) = \frac{\sinh(\frac{\pi}{2}(1-y))}{\sinh(\frac{\pi}{2})} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}x) \; .$$



Man lege ein äquidistantes Gitter auf Ω und bezeichne die Temperaturwerte mit $a - f$ (vgl. Bild). Die Potentialgleichung kann angenähert durch die Forderung ersetzt werden, daß der Temperaturwert in jedem Punkt gleich dem arithmetischen Mittel der Temperaturwerte in den vier Nachbarpunkten ist.

(a) Stellen Sie das zugehörige LGS auf.

(b) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung des LGS mit dem Gesamtschritt- bzw. Einzelschrittverfahren, das jeweils die ersten 25 Iterationen berechnet und sie mit der exakten Lösung vergleicht.

Startvektor:

$$\begin{array}{llllllll} a_0 &=& 0.6 & , \; b_0 &=& 0.3 & , \; c_0 &=& 0.5 \; , \\ d_0 &=& 0.2 & , \; e_0 &=& 0.3 & , \; f_0 &=& 0.1 \; . \end{array}$$

Abgabe von Aufgabe 42: Fr. 04.02.1995

Übungen zur Vorlesung "Numerik I"

Übungsblatt 12, Abgabe: 04.02.95, 11.00 Uhr

Aufgabe 43: (2+2+3 Punkte)
Sei $p \in \Sigma_3$ das Polynom, das die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an den Stützpunkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$ interpretiert.

(a) Bestimmen Sie p mit der Formel von Lagrange.

(b) Bestimmen Sie p mit der Newtonschen Interpolationsformel.

(c) Das Polynom $p_2 \in \Sigma_2$ interpoliere $f(x) = \sqrt{x}$ in den Knoten 1, 2, 3. Geben Sie eine Abschätzung für den Interpolationsfehler im Intervall $[1, 3]$.

Aufgabe 44: (2 Punkte)
Sei $p \in \prod_2$ das Interpolationspolynom zu gegebenen Stützwerten

x_j	-1	0	2
f_j	1	-0	4

mit $p(x_j) = f_j, \ \ j = 0, 1, 2$.
Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Neville zu $x = 1$ den Wert $p(x)$.

Aufgabe 45: (5 Punkte)
Der Streckenzug $s(x)$ interpoliere $f(x) = \ell n(x)$ in den äquidistanten Knoten $x_i = 2 + ih$, $h = 1/n, \ \ i = 0, \ldots, n$, d.h.

$$s(x) = (1-t) \cdot \ell n(x_i) + t \cdot \ell n(x_{i+1}) \ , \quad x_i \le x \le x_{i+1} \ , \quad t = (x - x_i)/h \ .$$

Bestimmen Sie ein möglichst kleines n so, daß

$$\max_{2 \le x \le 3} |s(x) - \ell n(x)| \le 10^{-3} \ .$$

<u>Hinweis:</u> Restgliedformel für $x_i \le x \le x_{i+1}$.

KLAUSUR: 6. Februar 1995, 13:15 - 16:30 Uhr,
Hörsaal: M1 (Übungsgruppen: Büskens, Biedenstein, Fourmont)
M2 (Übungsgruppen: Göllmann)

Bitte bringen Sie Ihren Studentenausweis zur Klausur mit.

<u>Erlaubte Hilsmittel:</u> Vorlesungsskriptum und bearbeitete Übungsaufgaben. Beides sollte zusammengeheftet sein und nicht als "Lose-Blatt-Sammlung" vorliegen!