Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 15.1.2008
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Blatt 12

Abgabe: 22.1.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (FFT) (4 Punkte)
Bestimmen Sie das trigonometrische Interpolationspolynom zu $f(x) := x$ auf $[0, 2\pi)$ zu den Stützstellen $x_k = \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, ..., 3$, mittels schneller Fouriertransformation. Fertigen Sie eine Skizze des Interpolationspolynoms an.

Aufgabe 2 (B-Splines) (1+3+4 Punkte)
Für eine Knotenfolge $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $t_i \leq t_{i+1}$ und $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$, $\lim_{i\to-\infty} t_i = -\infty$ seien für $i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0$ die $B-Splines$ $B_{ik} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad k rekursiv definiert durch:

$$\begin{aligned} B_{i0} &:= \begin{cases} 1 & \text{für } t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ B_{ik} &:= \omega_{ik}(x) B_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x)) B_{i+1,k-1}(x), \end{aligned}$$

wobei $\omega_{ik}(x) := \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} & \text{für } t_i < t_{i+k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Für die folgenden Aufgaben sei die Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ streng monoton wachsend.

a) Berechnen und skizzieren Sie $B_{i1}, B_{i+1,1}$ und B_{i2}.

b) Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

  i) $B_{ik}|_{[t_j,t_{j+1})} \in \mathbb{P}_k$,
  ii) $\text{supp}(B_{ik}) = [t_i, t_{i+k+1}]$,
  iii) $B_{ik} \geq 0, \sum_{i\in\mathbb{Z}} B_{ik}(x) = 1$ (Zerlegung der Eins).

c) Zeigen Sie:

  i) Für $k > 1$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx} B_{ik}(x) = \frac{k}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(x) - \frac{k}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x).$$

  ii) $B_{ik} \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und alle $k \geq 1$.

Hinweis: Verwenden Sie für i), dass für $k > 1$ gilt

$$\frac{\omega_{ik}(x)}{t_{i+k-1} - t_i} = \frac{\omega_{i,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i}, \frac{1 - \omega_{ik}(x)}{t_{i+k} - t_{i+1}} = \frac{1 - \omega_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i}.$$

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe: Spline Interpolationsfehler/EOC)(4 Punkte)
Sei $f(x) = \sqrt{x}$, $\Delta := \{0 = x_0 < \ldots < x_n = 1\}$ und $s \in S^{1,0}_\Delta$ der lineare Interpolierende Spline von f auf $[0,1]$.

a) Wir definieren als Approximation für den $\|\cdot\|_\infty$-Fehler für $m \in \mathbb{N}, m > 2$:

$$e_{\Delta,m} := \max_{x \in \Delta_m} |f(x) - s(x)|,$$

wobei Δ_m das m-fach unterteilte Gitter Δ bezeichnet, d.h. $\Delta_m := \Delta \cup \{x_i + r(x_{i+1} - x_i)/m) | i = 0, \ldots, n-1, r = 1, \ldots, m-1\}$. Schreiben Sie eine Routine, die die Stützstellen Δ und den Unterteilungsgrad m als Eingabe bekommt, und den Fehler $e_{\Delta,m}$ berechnet.

b) Bestimmen Sie den Fehler $e_{\Delta,m}$ für $m = 10$, $x_k = k/n, k = 0, \ldots, n$ und $n = 1, 3, 7, 15, 31, 63$. Wiederholen Sie dies für die Knotenwahl $x_k = (k/n)^4$.

c) Seien Δ und Δ' zwei Mengen von Interpolationspunkten mit unterschiedlicher Anzahl von Punkten $|\Delta| \neq |\Delta'|$. Hiermit definieren wir die experimentelle Konvergenzordnung (*Experimental Order of Convergence*) des Interpolationsfehlers als

$$EOC(\Delta, \Delta') := \frac{\ln(e_{\Delta,m}/e_{\Delta',m})}{\ln(|\Delta|/|\Delta'|)}.$$

Berechnen Sie diese Größe für alle aufeinanderfolgenden Glieder obiger n-Sequenz.

Hinweis: Man kann zeigen, dass für die erste Knotenwahl aus b) gilt $\|f - s\|_\infty \geq \frac{1}{4} n^{-1/2}$ und für die zweite Knotenwahl $\|f - s\|_\infty \leq \frac{1}{2} n^{-2}$.