Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk

8.1.2008

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Blatt 11

Abgabe: 15.1.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Richardson Extrapolation) (4 Punkte)

Gegeben seien $h_k := 2^{-k}$, $a(h) := \frac{f(h)-f(-h)}{2h}$, $f(h) := \frac{1-h}{2+h}$. Dann approximiert die Folge $(a(h_k))_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \to \infty$ die Ableitung $f'(0)$. Berechnen Sie mit Hilfe der Richardson Extrapolation eine Näherung der Ableitung $f'(0)$ für $k = 0, 1, 2$ mit $q = 1$ und $q = 2$. Geben Sie dazu alle Werte a_{kn}, $n = 0, ..., k$ an (Neville Schema). Vergleichen Sie die Ergebnisse für $q = 1$ und $q = 2$.

Aufgabe 2 (Trigonometrische Interpolation) (4 Punkte)

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und $(x_k, f_k) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_k := 2\pi\frac{k}{n}$, $0 \leq k \leq n-1$. Es sei $p(x) := \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx}$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom. Für $s \leq n-1$ sei

$$p_s := \sum_{j=0}^{s-1} c_j e^{ijx}.$$

Zeigen Sie: Unter allen trigonometrischen Polynomen $q_s \in T_{s-1}$ $(0 \leq s \leq n-1)$ minimiert gerade p_s die Fehlerquadratsumme

$$s(q_s) := \sum_{k=0}^{n-1} |f_k - q_s(x_k)|^2.$$

Aufgabe 3 (Faltungssatz) (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{P}_n := \{f = (f_k)_{k=-\infty}^{\infty} |\ f_k \in \mathbb{C}, f_{k+n} = f_k \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\}$$

die Menge der n-periodischen komplexen Zahlenfolgen. Auf $\mathcal{P}_n$ seien zwei Multiplikationen definiert durch

$$f \cdot g := (f_k g_k)_{k=-\infty}^{\infty} \qquad \text{(Hadamard Produkt)},$$

$$f * g := \left(\sum_{l=0}^{n-1} f_l g_{k-l}\right)_{k=-\infty}^{\infty} \qquad \text{(Faltung)}.$$

Mit $\omega_n := e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ sei ferner die diskrete Fourier-Transformation (DFT) $F_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definiert durch

$$(F_n f)_j = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{jk} f_k.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{P}_n$ ist ein n-dimensionaler linearer Raum und F_n ist linear.

b) F_n ist bijektiv und $F_n^{-1} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ ist gegeben durch $F_n^{-1} = \frac{1}{n}\bar{F}_n$, wobei

$$(\bar{F}_n f)_j := \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-jk} f_k \qquad \text{(konjugierte DFT).}$$

c) Sind $f, g \in \mathcal{P}_n$, so ist

$$\begin{aligned} F_n(f \cdot g) &= \frac{1}{n} F_n f * F_n g, \\ F_n(f * g) &= F_n f \cdot F_n g. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: DFT) (4 Punkte)

Sei die DFT wie in der vorigen Aufgabe für $n \in \mathbb{N}$ definiert. Wegen der Periodizität von $\mathcal{P}_n$ kann für $f = (f_k)_{k=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{P}$ die DFT $g = (g_k)_{k=-\infty}^{\infty} := F_n f$ kompakt als Matrixgleichung mit einem $M_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Schreiben Sie eine Routine, die zu $n \in \mathbb{N}$ die komplexe Matrix M_n bestimmt (oder alternativ die reellen Matrizen $\mathrm{Re}(M_n)$ und $\mathrm{Im}(M_n)$).

b) Geben Sie die Matrizen ihrer Routine für $n = 2, 4, 8$ an. Bestimmen Sie die Fouriertransformierten $M_n v$ für $v = (1,0,0,0,0,0,0,0)^T, (1,0,0,0,1,0,0,0)^T, (1,0,1,0,1,0,1,0)^T$.