Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk

18.12.2007

Übung zur Vorlesung

# Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Blatt 10

**Abgabe:** 8.1.2008, vor der Vorlesung

**Aufgabe 1 (Trigonometrische Funktionen)** (2 Punkte)

Seien $n, j \in \mathbb{N}$ gegeben und sei $x_k := k\frac{2\pi}{n+1}$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(jx_k) = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(jx_k) = \begin{cases} n+1, & \text{falls } j \text{ durch } n+1 \text{ teilbar ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hinweis: Die Aussage lässt sich kompakt mit Hilfe von komplexen Einheitswurzeln formulieren.

**Aufgabe 2 (Dividierte Differenzen)** (6 Punkte)

Sei $f \in C^0(a,b)$, $x_0, ..., x_n \in (a,b)$ paarweise disjunkt. Zeigen Sie:

a) Die dividierte Differenz $f[x_0, ..., x_n]$ ist eine symmetrische Funktion, d.h. für jede Permutation $\pi : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, n\}$ gilt $f[x_{\pi(0)}, ..., x_{\pi(n)}] = f[x_0, ..., x_n]$.

b) Sei $t \neq x_k$, $k = 0, ..., n$ fest gewählt und $p$ das Interpolationspolynom von $f$ an den Stellen $x_0, ..., x_n$. Dann gilt $f(t) - p(t) = f[x_0, ..., x_n, t] \prod_{j=0}^{n}(t - x_j)$.

c) Ist $f \in C^n(a,b)$, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f[x_0, ..., x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$.

**Aufgabe 3 (Polynomiale Interpolation in 2D)** (4 Punkte)

An den Stützstellen $\mathbf{x}_0 = (0,0)^T, \mathbf{x}_1 = (1,0)^T, \mathbf{x}_2 = (0,1)^T, \mathbf{x}_3 = (1,1)^T$ seien die Werte $z_0 = z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = 1$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass es kein lineares Polynom $p(x,y)$ gibt, welches die Werte $z_i$ in den Punkten $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T$ für $i = 0, \ldots, 3$ annimmt.

b) Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x,y)$, das die Werte $z_i$ in den Punkten $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T$ für $i = 0, \ldots, 3$ annimmt und erfüllt:

$$p_{|[\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1]}, p_{|[\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3]}, p_{|[\mathbf{x}_0\mathbf{x}_2]}, p_{|[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3]} \in \mathbb{P}_1.$$

Hierbei bezeichnet $[\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = \{\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}' | \alpha \in [0,1]\}$ die Strecke zwischen $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$.

c) Zeigen Sie, dass $p$ eindeutig bestimmt ist.

**Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Hermite Interpolation)** (4 Punkte)

a) Zu gegebenen Stützstellen $x_i, i = 0, \ldots, n$ und einer Matrix von Zielwerten $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times d}$ ist das Hermite-Interpolationspolynom $p \in \mathbb{P}_{d(n+1)-1}$ mit $p^{(j)}(x_i) = c_{(i+1)(j+1)}$ eindeutig definiert. Dieses läßt sich in der Newton-Form zu den Stützstellen $(z_i)_{i=0}^{d(n+1)-1}$ mit $z_{i+j} := x_i$ für $j = 0, \ldots, d-1, i = 0, \ldots, n$ ausdrücken. Schreiben Sie eine Routine, die die Koeffizienten der Newton-Form bestimmt.

b) Wenden Sie ihre Routine an, um zu den Daten

$$(x_i)_{i=0}^4 = (-2, -1, 0, 1, 2) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

die Koeffizienten des Interpolationspolynoms zu bestimmen.