Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk 11.12.2007

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Blatt 9

Abgabe: 18.12.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Polynom-Interpolation) (4 Punkte)
Seien $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i = 0, 1, 2$ gegeben mit $y_1 < y_0, y_1 < y_2, x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h > 0$.

a) Zeigen Sie, dass das zugehörige Interpolationspolynom $p \in \mathbb{P}_2$ ein eindeutig bestimmtes Minimum in einem Punkt x_* hat.

b) Geben Sie eine Formel für x_* an und zeigen Sie, dass gilt $|x_* - x_1| \leq \frac{h}{2}$.

Aufgabe 2 (Hermite-Interpolation) (4 Punkte)
Seien $x_1 < x_2 < x_3, f \in C^4([x_1, x_3])$. Zeigen Sie:

a) Es gibt genau ein Polynom p vom Grad ≤ 3 mit der Eigenschaft

$$p(x_i) = f(x_i), \qquad i = 1, 2, 3, \quad \text{und} \quad p'(x_2) = f'(x_2).$$

b) Für alle $x \in [x_1, x_3]$ gilt die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{||f^{(4)}||_\infty}{4!} |\omega(x)|$$

wobei $\omega(x) := (x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)$.

Hinweis zu b): Zeigen Sie zunächst, dass für $x \neq x_i$ die Funktion $h(z) := f(z) - p(z) - \frac{f(x)-p(x)}{\omega(x)}\omega(z)$ vier Nullstellen hat, darunter eine mehrfache.

Aufgabe 3 (Birkhoff-Interpolation) (4 Punkte)
Finden Sie ein Polynom minimalen Grades, so dass

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 1 \quad \text{und} \quad p'(1/2) = 2$$

ist (mit Begründung zum minimalen Grad!).

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Newton-Form) (4 Punkte)

a) Schreiben Sie eine Routine, die zu vorgegebenen Stützstellen $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und Funktionswerten $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Koeffizienten $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n)^T$ des Interpolationspolynoms $p \in \mathbb{P}_n$ in der Newton-Form bestimmt. Schreiben Sie eine Routine, die das Interpolationspolynom zu gegebenen Stützstellen $\mathbf{x}$ und Koeffizienten $\mathbf{a}$ in beliebigen Punkten $x \in \mathbb{R}$ auswertet.

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Bestimmen Sie die Koeffizienten des Interpolationspolynoms $p(x)$ bzw. $\bar{p}(x)$ zu den Stützstellen $\mathbf{x} = (-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5)^T$ bzw. $\bar{\mathbf{x}} = (-5, -4.5, -4, -3, -1.5, 0, 1.5, 3, 4, 4.5, 5)^T$. Visualisieren Sie f, p und $\bar{p}$.