Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 4.12.2007
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Blatt 8

Abgabe: 11.12.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Konvergenz des Newton-Verfahrens) (2 Punkte)
Sei $f \in C^2([a,b])$ und $x^* \in (a,b)$ sei eine einfache Nullstelle. Zeigen Sie, dass für genügend kleines $\rho > 0$ das Newtonverfahren für jeden Startwert $x^{(0)} \in B_\rho(x^*)$ konvergiert.

Aufgabe 2 (Konvergenz des Sekanten-Verfahrens) (6 Punkte)
Sei $f \in C^2([a,b])$ mit $x^* \in (a,b)$, $f(x^*) = 0$ und $m := \min_{x\in[a,b]} |f'(x)| > 0, M := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Sei $q := \frac{M}{2m}\rho < 1$ für ein $\rho > 0$. Sei $x^{(0)}, x^{(1)} \in B_\rho(x^*)$ mit $x^{(0)} \neq x^{(1)}$ und $x^{(k)}$ definiert durch das Sekantenverfahren. Zeigen Sie:

a) Für alle k gilt $x^{(k)} \in B_\rho(x^*)$ und $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$.

b) Für alle k gilt die a-priori Fehlerschranke $|x^{(k)} - x^*| \leq \frac{2m}{M} q^{\gamma_k}$, wobei $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen ist, d.h. $\gamma_0 = \gamma_1 = 1, \gamma_{k+2} = \gamma_{k+1} + \gamma_k$.

c) Für alle $k \geq 1$ gilt die a-posteriori Fehlerschranke

$$\left|x^{(k)} - x^*\right| \leq \frac{1}{m}|f(x^{(k)})| \leq \frac{M}{2m}|x^{(k)} - x^{(k-1)}|^2.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass gilt $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right| \leq \frac{M}{2}|y-z|$.

Aufgabe 3 (Verfahren höherer Ordnung) (4 Punkte)
Zur Berechnung von $\sqrt{a}, a > 0$ kann man das Newtonverfahren einsetzen, z.B. mit $f_0(x) = x^2 - a$ oder mit $f_1(x) = \frac{a}{x^2} - 1$. Sei Φ_i die zugehörige Iterationsfunktion zu f_i $(i = 0, 1)$. Betrachten Sie die Iterationsfunktion Φ_s, die durch Linearkombination von Φ_0, Φ_1 entsteht, d.h. $\Phi_s(x) = (1-s)\Phi_0(x) + s\Phi_1(x)$.

a) Zeigen Sie, dass das Verfahren $x^{(k+1)} = \Phi_s(x^{(k)})$ mindestens quadratisch gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass es ein s_a gibt für das das Verfahren kubisch (3. Ordnung) konvergiert.

Aufgabe 4 (Nullstellenabschätzung für Polynome) (4 Punkte)
Sei $p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k$, mit $a_n \neq 0, a_0 = 1$. Sei weiter x^* eine Nullstelle von p. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$|x^*| \leq \min\{A, B, C\}$$

mit $A := \max\{1, \sum_{k=1}^{n} |a_k|\}$, $B := 1 + \max_{1\leq k\leq n} |a_k|$, $C := 2\max_{1\leq k\leq n} |a_k|^{1/k}$.

Aufgabe 5 (Bonus-Programmieraufgabe: Sekantenverfahren) (4 Bonus-Punkte)
Das gedämpfte Sekantenverfahren zur Nullstellensuche einer Funktion $f \in C^0(\mathbb{R})$ ist definiert durch zwei Startwerte $x^{(0)} \neq x^{(1)} \in \mathbb{R}$, einer gegebenen Folge von Gewichten $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \omega_k = 1$ und der Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega_k \frac{f(x^{(k)})(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}.$$

a) Schreiben Sie eine Routine, die dieses Verfahren realisiert. Außer der Funktion f und den beiden Startwerten soll ein Parameter das Ein- oder Ausschalten der Dämpfung ermöglichen. Die Folge der Gewichte im Fall der Dämpfung sei hierbei $\omega_k := \frac{1}{1+10e^{-k}}$. Im Fall ohne Dämpfung ist $\omega_k = 1$. Weitere Parameter sind die Maximalzahl der Iterationen k_{max} und eine Genauigkeitstoleranz $\varepsilon > 0$. Ergebnis Ihrer Routine soll $x^{(k)}$ sein, sobald die gewünschte Genauigkeit $|f(x^{(k)})| < \varepsilon$ erreicht ist. Falls dies in gewünschter Iterationszahl nicht möglich ist, wird $x^{(k_{max})}$ zurückgegeben.

b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten Ihrer Routine anhand der Funktion $f(x) = \arctan(x-1)$ und den Einstellungen $x^{(0)} = 4, x^{(1)} = 4.01, k_{max} = 20, \varepsilon = 10^{-10}$. Geben Sie die Folge der Näherungslösungen an, die ohne Dämpfung und mit Dämpfung erzeugt werden. Konvergieren diese gegen die eindeutige Nullstelle $x^* = 1$?