Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 27.11.2007
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Blatt 7

Abgabe: 4.12.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Relaxationsverfahren) (4 Punkte)
Sei $A = L+D+R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $D = I_n$, wobei I_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnet. Sei T die zugehörige Iterationsmatrix des Gesamtschrittverfahrens zur Lösung von $Ax = b$. Die Eigenwerte λ_i der Matrix T seien reell und erfüllen $-1 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n < 1$. Für $\omega \in \mathbb{R}$ sei das Relaxations-Verfahren durch die Iterationsmatrix $T(\omega) = (1-\omega)I_n + \omega T$ und die Iterationsvorschrift $x^{(k+1)} = T(\omega)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass $T(\omega)$ die Eigenwerte $\mu_i = 1 - \omega + \omega\lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$ besitzt.

b) Bestimmen Sie ω_0 so, dass der Spektralradius von $T(\omega_0)$ minimal wird.

c) Zeigen Sie, dass der Spektralradius von $T(\omega_0)$ für $\lambda_1 \neq -\lambda_n$ kleiner als der Spektralradius von $T(1) = T$ ist.

Aufgabe 2 (Vorkonditionierung von LGS) (4 Punkte)
Zu einem Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}, a_{ii} \neq 0, b \in \mathbb{R}^n$ besteht die *Zeilenäquilibrierung* darin, das System $CA = Cb$ zu lösen, wobei $C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $c_i := \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|\right)^{-1}$. Die *Diagonalvorkonditionierung* verwendet stattdessen die Matrix $C' = \mathrm{diag}(a_{11}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1})$. Gegeben seien für $a \neq 0$ die folgende Matrix und ihre Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 2a & 4a^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2a} & \frac{2}{a} & -\frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2a^2} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{2a^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für $a > 4$ die Konditionen $\mathrm{cond}_\infty(A)$, $\mathrm{cond}_\infty(CA)$ und $\mathrm{cond}_\infty(C'A)$ (d.h. bzgl. der induzierten $\|\cdot\|_\infty$-Norm). Welches der Verfahren ist daher für große a zu bevorzugen?

Aufgabe 3 (Newton-Verfahren für Polynome) (4 Punkte)
Es sei $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$ ein Polynom mit n reellen Nullstellen $\xi_1 \geq \ldots \geq \xi_n$. Zeigen Sie, dass das Newtonverfahren für jeden Startwert $x^{(0)} > \xi_1$ monoton gegen ξ_1 konvergiert.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Nullstellensuche) (4 Punkte)

a) Schreiben Sie eine Routine, die zu einer Funktion $f \in C^0(\mathbb{R})$, gegebenen Schranken $a < b$ mit $f(a)f(b) \leq 0$ und bestimmter Anzahl Iterationen k die Approximation $x^{(k)}$ in $[a, b]$ mit dem Intervallschachtelungsverfahren bestimmt.

b) Schreiben Sie eine Routine, die zu einer gegebenen Funktion $f \in C^1(\mathbb{R})$ und ihrer Ableitung $f' \in C^0(\mathbb{R})$ mit Startwert x_0 und festgelegter Anzahl Iterationen k die Approximation $x^{(k)}$ mit dem Newtonverfahren bestimmt.

c) Sei $f(x) = \operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $x \in I := [a, b] := [1, 2]$. Die einzige Nullstelle von f in I ist $\pi/2$. Berechnen Sie die Approximation der Nullstelle von f mit der Intervallschachtelung (27 Iterationen). Berechnen Sie die Approximation der Nullstelle von f mit dem Newton Verfahren (3 Iterationen, $x_0 = 1$). Vergleichen Sie die absoluten Fehler der beiden Approximationen.