Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 20.11.2007
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Blatt 6

Abgabe: 27.11.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Matrixapproximation durch SVD) (4 Punkte)
Es sei eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Rang p mit diagonalem $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_p > 0$ und orthogonalen $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Zu einem r mit $1 \leq r < p$ wird eine Approximation $A_r := U\Sigma_r V^T$ mit $\Sigma_r := \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiert. Zeigen Sie für $r = 1$, dass bzgl. der Frobenius-Norm $\|A\|_F := (\sum_{i,j=1}^{m,n}(a_{ij}^2))^{1/2}$ gilt:

$$\inf_{B\in\mathbb{R}^{m\times n},\mathrm{rang}(B)=r} \|A - B\|_F = \|A - A_r\|_F \,.$$

Bemerkung: Die Aussage gilt allgemeiner für alle $1 \leq r < p$.

Aufgabe 2 (Eindeutigkeit der Pseudo-Inversen) (4 Punkte)
Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sei eine Singulärwertzerlegung wie in Aufgabe 1 gegeben.

a) Zeigen Sie, dass durch die *Moore-Penrose Bedingungen*

$$AB = (AB)^T, \qquad BA = (BA)^T, \qquad BAB = B, \qquad ABA = A$$

eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eindeutig definiert ist.

b) Wir definieren die Diagonalmatrix $\Sigma^+ := \mathrm{diag}(1/\sigma_1, \ldots, 1/\sigma_p, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Zeigen Sie, dass die Matrix $B := V\Sigma^+U^T$ die Moore-Penrose-Bedingungen erfüllt. Hiermit ist insbesondere die Pseudoinverse $A^+ := V\Sigma^+U^T$ unabhängig von der Wahl der Singulärwertzerlegung eindeutig definiert.

Aufgabe 3 (Zerlegbarkeit von Matrizen) (4 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann zerlegbar ist, wenn eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit

$$P^\top AP = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $\tilde{A}_{22} \in \mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}$, $\tilde{A}_{21} \in \mathbb{C}^{(n-k)\times k}$ mit $1 \leq k \leq n-1$.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Gesamtschrittverfahren) (4 Punkte)

a) Implementieren Sie das Jacobi-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Diese Routine bekommt als Argumente die Matrix A und die rechte Seite b. Es wird weiter eine maximale Iterationsanzahl k_{max} übergeben, ein Kontraktionsfaktor q (bzgl. der Norm $\|\cdot\|_2$) und eine Abbruchtoleranz $\varepsilon > 0$. Die Routine beginnt eine Schleife mit dem Startvektor $x_0 = 0$, als Abbruchkriterium gilt das Erreichen der maximalen Anzahl k_{max} an Iterationen oder ein Unterschreiten der a posteriori Fehlerschranke ε. Als Ergebnis soll die Näherungslösung x_k, die Anzahl der durchgeführten Iterationen k und die a posteriori Fehlerschranke zurückgeben werden.

b) Ermitteln Sie mit einem direkten LGS-Lösungsverfahren eine (bis auf numerische Ungenauigkeiten) exakte Lösung x des Gleichungssystems von Blatt 5, Aufgabe 4 für $n = 50$ Unbekannte. Bestimmen Sie für $k = 0, 1000, 2000, \ldots, 10000$ den Fehler $\|x_k - x\|_2$. Bestimmen Sie für die folgenden Werte von n und zugehörigen q die Anzahl der Iterationen k, die notwendig sind, um die a posteriori Schranke unter $\varepsilon = 10^{-3}$ zu bringen.

n	10	20	30	40	50
q	0.9595	0.9889	0.9949	0.9971	0.9982