Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 13.11.2007
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Blatt 5

Abgabe: 20.11.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Positiv Definite Tridiagonalmatrizen) (4 Punkte)
Gegeben sei folgende Matrix für $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -a & 0 \\ 0 & -a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Matrix positiv definit ist.

b) Geben Sie für die Fälle aus a) die Cholesky-Zerlegung der Matrix an.

Aufgabe 2 (Lineare Ausgleichsrechnung) (4 Punkte)
In einem Experiment messen Sie die folgende Abnahme einer Konzentration gegenüber der Zeit:

Zeit t [s]	1	4	5	8
Konzentration $c(t)$ [mol/l]	9.1	2.0	0.8	0.2

a) Stellen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ auf, welches bei einer Ausgleichsrechnung unter Annahme eines linearen Zusammenhangs $c(t) = c^0 + at$ entsteht.

b) Berechnen Sie die QR-Zerlegung von A und lösen Sie die Normalengleichung.

Aufgabe 3 (LR-Zerlegung für Tridiagonalmatrizen) (4 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & \vdots \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \dots & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die LR-Zerlegung der Matrix in Abhängigkeit der Parameter $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ an.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Randwertproblem) (4 Punkte)
Betrachten Sie das Randwertproblem $-u''(x) = f(x), x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Durch $x_i := hi$, $h := \frac{1}{n+1}$, $i = 0, \dots, n+1$ ist eine Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ gegeben. Eine Diskretisierung des Randwertproblems führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $u_0, u_{n+1} = 0$ gegeben sind und $u_i, i = 1, \dots, n$ die gesuchten Näherungswerte für $u(x_i)$ sind. Die rechte Seite $f(x)$ sei gegeben durch $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$.

a) Schreiben Sie eine Routine, die eine untere und obere Dreiecksmatrix L und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ übergeben bekommt und die Lösung $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems $LR\bar{x} = b$ berechnet. Hierzu sollen keine Matrix-Operationen verwendet werden, stattdessen explizit mit den Einträgen der Matrizen und Vektoren gearbeitet werden.

b) Schreiben Sie eine Routine, die zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ die LR-Zerlegung der Matrix von obigem Randwertproblem aufstellt und die rechte Seite b aufstellt. Die Berechnung der LR-Zerlegung soll hier mit der Darstellung aus Aufgabe 3 erfolgen. Geben Sie für $n = 10$ die resultierenden Matrizen L und R an.

c) Lösen Sie das Randwertproblem für $n = 10$ durch Kombinieren Ihrer Routinen aus a) und b) und geben Sie den Lösungsvektor an.