Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 30.10.2007
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Blatt 3

Abgabe: 6.11.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Spektralnorm von Matrizen) (4 Punkte)
Es soll die Gültigkeit der Spektralnorm-Darstellung $\|A\|_{2,2} = \sqrt{\lambda_{max}(A^*A)}$ für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bewiesen werden. Hierbei bezeichnet $\lambda_{max}(B)$ den maximalen reellen Eigenwert einer positiv semidefiniten Matrix B.

a) Zeigen Sie, dass A^*A stets symmetrisch und positiv semidefinit ist.

b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{\lambda_{max}(A^*A)}$ eine obere und untere Schranke für $\|A\|_{2,2}$ ist.

Aufgabe 2 (Konditionszahlen) (4 Punkte)
Es bezeichne $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ die Menge der Eigenwerte der reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für die Kondition bzgl. der Spektralnorm

a) von symmetrischen regulären Matrizen gilt

$$\mathrm{cond}(A) := \frac{\max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|},$$

b) von orthogonalen Matrizen gilt

$$\mathrm{cond}(A) = 1.$$

Aufgabe 3 (Unvollständiger Prä-Hilbertraum) (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass $V := (C[0,1], \|\cdot\|_{L^2})$ der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit der L^2-Norm $\|f\|_{L^2} := \int_0^1 f(x)^2 dx$ ein normierter Raum ist, aber kein Banachraum.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Apfelmännchen) (6 Punkte)

Für eine komplexe Zahl c sei folgende rekursive Folge definiert: $z_0 := 0$, $z_{n+1} := z_n^2 + c$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren zu gegebener Konstante $N \in \mathbb{N}$ folgende Funktion:

$$f_N(c) := \begin{cases} 0, & \text{falls } |z_n| \leq 2 \text{ für alle } n = 0, \ldots, N \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass das Problem der Berechnung von $f_N(c)$ für $c = -2$ für kein $N > 1$ wohlgestellt ist. Zeigen Sie, dass für $|c| > 2$ die Berechnung von $f_N(c)$ in geeigneter Umgebung $B_\delta(c)$ wohlgestellt ist.

b) Implementieren Sie die Funktion $f_N(c)$. Werten Sie Ihre Funktion für $N = 200$ auf einem äquidistanten kartesischen Gitter im Bereich $[-2.25, 1] \times i[-1.5, 1.5] \subset \mathbb{C}$ aus. Hierbei seien die komplexen Zahlen mit dem $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Visualisieren Sie die resultierenden Werte z.B. als Textausgabe, 2D-Darstellung oder 3D-Funktionsgraph.

Bemerkung: Die Punkte $c \in \mathbb{C}$ mit $f_N = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ bilden die *Mandelbrot-Menge*.