Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 23.10.2007
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Blatt 2

Abgabe: 30.10.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Banachscher Fixpunktsatz) (6 Punkte)
Sei X ein Banachraum, $D \subset X$ abgeschlossene Teilmenge, $T : D \to D$ eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $L \in [0, 1)$. Zeigen Sie:

a) T hat höchstens einen Fixpunkt $\bar{u} \in D$.

b) Sei $u_0 \in D$ beliebig und $u_{k+1} := T(u_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann konvergiert die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und der Grenzwert $\bar{u} := \lim_{k\to\infty} u_k$ erfüllt $\bar{u} \in D$ und ist Fixpunkt von T.

c) $||\bar{u} - u_k|| \leq L||\bar{u} - u_{k-1}||$, für $k \in \mathbb{N}$, d.h. der Fehler sinkt monoton.

d) $||\bar{u} - u_k|| \leq \frac{L^k}{1-L}||T(u_0) - u_0||$ für $k \in \mathbb{N}_0$ (A priori Fehlerschranke).

e) $||\bar{u} - u_k|| \leq \frac{L}{1-L}||u_k - u_{k-1}||$ für $k \in \mathbb{N}$ (A posteriori Fehlerschranke).

Aufgabe 2 (Anwendung des Fixpunkt-Satzes) (4 Punkte)
Zur Lösung von $x + \ln x = 0$ stehen die folgenden Formeln zur Verfügung:

(i) $x = g_1(x) := -\ln x$,

(ii) $x = g_2(x) := e^{-x}$,

(iii) $x = g_3(x) := \frac{\beta x + e^{-x}}{\beta + 1}$, $\beta > 0$.

Untersuchen Sie die drei Funktionen auf Eignung für das Fixpunktverfahren. Geben Sie jeweils ein entsprechendes (nichttriviales) Intervall und zugehörigen Kontraktionsfaktor an, oder begründen Sie die Unbrauchbarkeit der Funktion.

Aufgabe 3 (Maximumsnorm von Matrizen) (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass durch $\|A\| := \max_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ eine Norm auf $B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ definiert wird, welche durch kein Paar Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ induziert wird.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Wurzelberechnung) (4 Punkte)

Zur Bestimmung von $\sqrt{a}$, $0 < a < 2$ kann man $b = 1 - a$ setzen und $x = 1 - \sqrt{a}$ als Fixpunkt folgender Gleichung ermitteln

$$x = g(x) := \frac{1}{2}(x^2 + b).$$

Das Kontraktionsintervall ist $I := [-|b|, |b|]$ und die Funktion g erfüllt die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit Kontraktionsfaktor $L = |b|$.

a) Implementieren Sie eine Routine, die zu gegebenem a, Startwert $x_0 \in I$ und Fehlertoleranzgrenze TOL die Fixpunktiteration durchführt. Die Routine soll abbrechen, wenn die a posteriori Fehlerschranke unter TOL liegt. Ausser der Näherung x_k soll die Routine die Anzahl der Iterationen k und den a posteriori Fehlerschätzer zurückliefern.

b) Bestimmen Sie für $a = 1.5$, $x_0 = 0.25$, $TOL = 10^{-5}$ die Resultate Ihres Programmes. Vergleichen Sie für die erhaltene Iterationsanzahl k die a priori Fehlerschranke, die a posteriori Fehlerschranke Ihres Programmes und den tatsächlichen Fehler. Wie viele Iterationen wären laut a priori Fehlerschranke nötig, um die gewünschte Genauigkeit in dem vorliegenden Fall zu erhalten?