Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk 16.10.2007

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Blatt 1

Abgabe: 23.10.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (1− und ∞-norm induzierte Operatornormen) (4 Punkte)
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine $n \times n$–Matrix.

a) Finden Sie eine optimale Konstante C_1, so dass gilt $||Ax||_1 \leq C_1||x||_1$.

b) Finden Sie eine optimale Konstante C_∞, so dass gilt $||Ax||_\infty \leq C_\infty||x||_\infty$.

c) Zeigen Sie, dass es für alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ eine Konstante C gibt, so dass gilt $||Ax|| \leq C||x||$.

Hinweis: $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$, $||x||_\infty := \max_{i=1,..,n} |x_i|$.

Aufgabe 2 (Stetigkeit von linearen Operatoren) (4 Punkte)
Seien V, W normierte Vektorräume und $A : V \to W$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) A ist stetig,

b) A ist beschränkt,

c) A ist stetig in 0.

Hinweis: A heißt beschränkt, falls es eine Konstante C gibt, mit $||Ax||_W \leq C||x||_V$ für alle $x \in V$. A heißt stetig im Punkt $x \in V$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit: Für alle $y \in V$ mit $||x - y||_V \leq \delta$ gilt $||Ax - Ay)||_W \leq \varepsilon$.

Aufgabe 3 (Beschränktheit linearer Operatoren) (4 Punkte)
Gibt es einen linearen Operator $A : V \to W$ mit normierten Räumen V, W, der nicht beschränkt ist? (Beweis oder Beispiel angeben!)

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Maschinen-Arithmetik) (4 Punkte)
Implementieren Sie die folgenden Funktionen für $x, y, z \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}$ derart, dass die Reihenfolge der Teiloperationen der Klammerung entspricht:

$$f_1(x,y,z) = x(y+z) \qquad g_1(x,y,z) = x + (y+z) \qquad h(n,m) = (1/n)^m \, n^m - 1$$
$$f_2(x,y,z) = xy + xz \qquad g_2(x,y,z) = (x+y) + z$$

a) Ermitteln Sie die Differenz zwischen f_1 und f_2 für $x = e^{10}, y = \sin(1.57), z = \ln 2.71$, und erläutern Sie dies.

b) Ermitteln Sie die Differenz zwischen g_1 und g_2 für $x = 10^{-10}, y = 10^{10}, z = -y$ und erläutern Sie dies.

c) Bestimmen Sie die Werte von $h(n,m)$ für $m = 10, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 8$ in einer Schleife und erläutern Sie die Ergebnisse.