
Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

WS 2007/2008 — Anwesenheitsübung

Aufgabe 1 (Ableitungsdiskretisierung)

Die folgenden Ableitungen der hinreichend oft differenzierbaren Funktion u seien im Punkt x durch die angegebenen Differenzenquotienten approximiert. Bestimmen Sie die Ordnung des Diskretisierungsfehlers in Abhängigkeit von der Schrittweite h .

$$\begin{aligned} \text{a) } u'(x) &\approx \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, & \text{b) } u'(x) &\approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ \text{c) } u'(x) &\approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}, & \text{d) } u''(x) &\approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Störungsanalyse)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sei gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für $b := (0.86419999, 0.14400001)^\top$ die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Was erhalten Sie, wenn Sie b auf vier Nachkommastellen runden, d.h. für $\tilde{b} := (0.8642, 0.1440)^\top$. Berechnen Sie den absoluten und relativen Fehler von x bezüglich b .

Hinweis: Sie können verwenden, dass $\det A = 10^{-8}$.

Aufgabe 3 (Gauß-Elimination)

Berechnen Sie durch Gaußelimination die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Was erhalten Sie, wenn Sie nach jeder Rechenoperation auf drei Stellen runden?

Vergleichen Sie das Ergebnis, mit dem Ergebnis des Gauß Algorithmus angewendet auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$