Matlab - Einführungskurs

zur Vorlesung *Einführung in die Numerische Mathematik*

ÜBUNGSAUFGABEN Datum: 7.11.2006, 8.11.2006

Aufgabe 11 (Kontrollstrukturen, M-files)
Schreiben Sie ein Programm `gausselim` zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit der (n, n) Matrix A. Das Programm soll folgende Punkte erfüllen:

- Es soll die Dimension n eingegeben werden können.
- Es soll eine Matrix A eingegeben werden können.
- Weiterhin soll ein Lösungvektor b eingegeben werden.
- Es sollen keine Pivotsuchen und Zeilenvertauschungen durchgeführt werden.
- Die Lösung x des Gleichungssystems soll ausgegeben werden.
- Setzen Sie voraus, dass das Programm nur auf Matrizen angewandt wird, die einen vollen Rang haben. D.h. Sie müssen nicht überprüfen, ob das Gleichungssystem lösbar ist. Weiterhin seien die Hauptabschnittsmatrizen von A als regulär vorausgesetzt.
- Testen Sie ihr Programm anhand des Beispiels

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -22 \\ -44 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Es gilt nach der Vorlesung:

Satz 1 *Sei A eine (n, n)-Matrix, deren Hauptabschnittsmatrizen A_j regulär sind. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung $A = LR$, wobei L eine linke Dreiecksmatrix mit $l_{jj} = 1$ für $j = 1, \ldots, n$ und R eine rechte Dreiecksmatrix ist.*

Allgemeine Vorgehensweise bei der Gauss-Elimination:

Gegeben seien die Ausgangsmatrix A und der Ausgangsvektor b mit

$$A =: A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} =: b^{(1)}.$$

1. Schritt: Sei $a_{11}^{(1)} \neq 0$.

$$L_1 A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} =: A^{(2)}, \quad L_1 b = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix} =: b^{(2)}.$$

und es gilt für alle $i = 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} l_{i1} &= \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ a_{ik}^{(2)} &= a_{ik}^{(1)} - l_{i1} a_{1k}^{(1)}, \quad k = 2, \ldots, n \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - l_{i1} b_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Ausgangsmatrix vor dem j. Schritt ($j \geq 2$):

$$L_{j-1} \ldots L_1 A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & & \cdots & & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_{jj}^{(j)} & \cdots & a_{jn}^{(j)} \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & a_{nj}^{(j)} & \cdots & a_{nn}^{(j)} \end{pmatrix} =: A^{(j)}, \quad L_{j-1} \ldots L_1 b = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_{j-1}^{(j-1)} \\ b_j^{(j)} \\ \vdots \\ b_n^{(j)} \end{pmatrix} =: b^{(j)}$$

j. Schritt: Sei $a_{jj}^{(j)} \neq 0$. Dann ist für $i = j+1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}} \\ a_{ik}^{(j+1)} &= a_{ik}^{(j)} - l_{ij} a_{jk}^{(j)}, \quad k = j+1, \ldots, n \\ b_i^{(j+1)} &= b_i^{(j)} - l_{ij} b_j^{(j)} \end{aligned}$$

und es folgt

$$L_j \ldots L_1 A = A^{(j+1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & & & \cdots & & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ & & a_{jj}^{(j)} & \cdots & \cdots & a_{jn}^{(j)} \\ \vdots & & 0 & a_{j+1,j+1}^{(j+1)} & \cdots & a_{j+1,n}^{(j+1)} \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{n,j+1}^{(j+1)} & \cdots & a_{nn}^{(j+1)} \end{pmatrix}, \quad b^{(j+1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_j^{(j)} \\ b_{j+1}^{(j+1)} \\ \vdots \\ b_n^{(j+1)} \end{pmatrix}$$

Nach $n-1$ Schritten erhält man schließlich

$$L_{n-1} \ldots L_1 A = A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} =: R, \quad L_{n-1} \ldots L_1 b = b^{(n)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix} =: c.$$

Das Gleichungssystem wird dann durch das so genannte Rückwärtseinsetzen gelöst: Für $j = n, n-1, \ldots, 1$ berechnet man die Komponenten x_j des Lösungsvektors x durch

$$x_j = \frac{1}{r_{jj}} \left(c_j - \sum_{k=j+1}^{n} r_{jk} x_k \right).$$