Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 8 , Abgabe: 22.12.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Ein vereinfachtes Modell zur Populationsentwicklung in einem begrenzten Lebensraum ist durch die *Logistische Gleichung*

$$x_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k), \quad k > 0 \tag{1}$$

gegeben. Hierbei ist x_0 die Anfangspopulation, x_k die Größe der Population zum Zeitpunkt k und λ ein für jede Iteration fester Umweltparameter.

Auf der Internetseite zu den Übungen finden Sie ein Matlab-Programm `logistischeGleichung.m`, das die Populationsentwicklung bei zufälliger Anfangspopulation graphisch darstellt. Zeile j im ausgegeben Bild steht für einen Wert λ_j im Intervall $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ (angegeben auf der y-Achse), welches standardmäßig auf $[0,4]$ eingestellt ist. Für jedes λ aus dem Intervall werden die Folgenglieder x_k ausgerechnet und als Punkte (x_k, λ) in der Graphik in jeder Iteration k eingetragen. Das Programm läuft mit einer Endlosschleife, die Iteration (1) bricht zunächst nicht ab, d.h. mit der Zeit konvergiert die Iteration in einigen Bereichen. Falls in einer Zeile nach einiger Zeit nur ein Punkt steht, so konvergiert die Folge vermutlich für das zugehörige λ.

Sie können durch Drücken der Tasten `x, h, n, L, Esc` das Programm wie folgt beeinflussen:

L	Eingabe eines neuen Intervalls $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ in der Matlab-Notation $\lambda_{\min}$: Schrittweite : $\lambda_{\max}$
n	neue Wahl des Startvektors x für alle λ durch einen Zufallsgenerator
x	neue Plot-Grenzen für x in Matlab-Notation $[x_0, x_1]$ festlegen
h	Wechsel zwischen einem `hold on` und einem `hold off`-Plot
Esc	Programm stoppt

(a) Machen Sie sich mit dem Programm vertraut. Beachten Sie einige interessante Bereiche der Graphik durch die Wahl eines neuen Intervalls $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ genauer (z.B. $[2.8, 3.2]$) Welche unterschiedlichen Arten des asymptotischen Verhaltens lassen sich beobachten?

(b) Zeigen Sie, dass die Folge für $\lambda > 3$ zunächst stabil zwischen zwei Häufungspunkten wechselt. Geben Sie den exakten Wert von λ an, bei dem der Wechsel von zwei Häufungspunkten auf vier Häufungspunkte stattfindet.

<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie die Funktion $f(f(x))$.

Aufgabe 28: (5 Punkte)
Beweisen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Funktion

$$f(x) = x^n - a\,, \qquad a > 0\,, \quad n \geq 2\,,$$

für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die positive Nullstelle $\overline{x} = a^{1/n}$ von f konvergiert. Überlegen Sie dazu, dass gilt:

(a) $x_k \geq a^{1/n} \quad \forall \quad k \geq 1\,,$

(b) $x_{k+1} \leq x_k \quad \forall \quad k \geq 1\,.$

Hinweis: Betrachten Sie die Newton'sche Iterationsfunktion und bestimmen Sie das Minimum dieser Funktion.

Aufgabe 29: (3 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $|g'(x)| \leq 0.5$ für $x \in \mathbb{R}$. Der Fixpunkt $\overline{x}$ von g soll mit einem absoluten Fehler kleiner gleich $0.5 \cdot 10^{-6}$ berechnet werden. Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = g(x_k)$ ergibt

$$x_4 = 0.51495 \quad \text{und} \quad x_5 = 0.51519\,.$$

Wie viele zusätzliche Iterationen muss man ausführen, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen?

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung mit

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2x_2 & - & x_1 x_2 & + & 1 \\ x_1^2 & - & x_2 & + & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung g auf der Menge $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ genau einen Fixpunkt $\overline{x} \in D$ besitzt.

(b) Berechnen Sie $x^1 = g(x^0)$ mit $x^0 = (0.5, 0.5)^T$. Wieviele Iterationen k benötigt man, um die Genauigkeit $\|\overline{x} - x^k\|_\infty \leq 0.01$ für den Fixpunkt $\overline{x} \in D$ zu erzielen?