Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte WS 06/07

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 7 , Abgabe: 15.12.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Für die Messwerte (t_i, y_i) aus der folgenden Tabelle

t_i	0.21	0.62	1.19	2.01	2.42	4.18
y_i	2.23	2.49	4.22	6.13	6.95	1.01

wird ein kubischer Zusammenhang $y(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ vermutet.

(a) Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ auf.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems mit Matlab, indem Sie die QR-Faktorisierung von A berechnen.

(c) Geben Sie die Norm des Fehlers $||Ax - b||_2$ an.

(d) Plotten Sie die Lösung und die Messwerte zusammen in einer *Figure* für $t \in [-1, 5]$.

Aufgabe 24: (2 Punkte)
Eine Alternative in der QR-Zerlegung zur Householdermethode ist die *Givens-Rotation.* Sei φ ein Rotationswinkel. Dann heißt die unitäre (n, n)-Matrix G *Givens-Rotation um den Winkel* φ *in der Ebene* (i, k), falls G bis auf die Elemente

$$\begin{aligned} G_{i,i} &= \cos(\varphi) \\ G_{i,k} &= \sin(\varphi) \\ G_{k,i} &= -\sin(\varphi) \\ G_{k,k} &= \cos(\varphi) \end{aligned}$$

für ein Paar (i, k) mit $1 \leq i, k \leq n$ mit der Einheitsmatrix übereinstimmt. Sei A eine (n, m)-Hessenbergmatrix mit $n \geq m$, d.h. A erfüllt $A_{i,j} = 0$ für $i > j + 1$. Bestimmen Sie φ so, dass für die Givens-Rotation G um den Winkel φ in der $(1, 2)$-Ebene gilt, dass GA in der ersten Spalte unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen als Einträge hat.

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Ein Versuch mit m Messungen führt auf ein lineares Ausgleichsproblem mit der (m, n)-Matrix A. Die Matrix A liege in QR-Zerlegung $A = QR$ vor. Nun werde ein weiterer

Messwert (an erster Stelle) hinzugeführt. Geben Sie Formeln zur Berechnung von $\tilde{Q}\tilde{R} = \tilde{A}$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \omega^T \\ A \end{pmatrix}, \quad w \in \mathbb{R}^n$$

unter Benutzung der QR-Zerlegung von A an.

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Durch die Messpunkte

t_i	$\frac{1}{e}$	1	e
y_i	-1	e	$2+e^2$

soll eine Ausgleichsfunktion $y(t) = \alpha t + \beta \ln(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, gelegt werden. Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem und berechnen Sie die optimalen Parameter α, β.

Hinweis: Nach Aufstellung der Normalgleichungen können die Parameter α, β durch »scharfes Hinsehen« bestimmt werden.