

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 6 , Abgabe: 1.12.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 19: (3+1 Punkte)Die (n, n) -Matrix A sei diagonaldominant, d.h. es gelte $|a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$ für $i = 1, \dots, n$.

(a) Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|Ax\|_{\infty} \geq c\|x\|_{\infty} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \quad c := \min_{i=1, \dots, n} \left(|a_{ii}| - \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \right)$$

und folgern Sie daraus die Abschätzung

$$\text{cond}_{\infty}(A) \leq \|A\|_{\infty}/c.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\|x\|_{\infty} = |x_r|$ und $\|Ax\|_{\infty} \geq |(Ax)_r|$.

(b) Bei der Spline-Interpolation begegnet man der Tridiagonal-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ \alpha_2 & 1 & \beta_2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \alpha_i, \beta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \beta_1, \alpha_n \leq 1/2, \\ \alpha_i + \beta_i = 1/2, \quad i = 2, \dots, n-1. \end{array}$$

Geben Sie eine Abschätzung für $\text{cond}_{\infty}(A)$ an.**Aufgabe 20:** (4 Punkte)Berechnen Sie die Lösung $x_0 \in \mathbb{R}$ des linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \|y - Ax\|_2^2, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) mit den Normalgleichungen,

(b) mit dem QR -Verfahren.Bestimmen Sie in beiden Fällen das Residuum $\|y - Ax_0\|_2$ und skizzieren Sie die Lösung graphisch.

Aufgabe 21: (4 Punkte)

Berechnen Sie die kleinste-Quadrate-Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},$$

indem Sie das Householder-Verfahren »von Hand« durchführen, um die Matrizen Q und R zu bestimmen und das Gleichungssystem $Rx = Q^*b$ zu lösen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Matlab. Schauen Sie sich dazu die Hilfe zu den Befehlen `qr`, `pinv` und zu dem arithmetischen Operator `\` an.

Aufgabe 22: (4 Punkte)

Für die Größen α und β wird ein linearer Zusammenhang $y = \alpha + \beta t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vermutet. In einem Experiment werden für die Punkte t_i die Werte y_i , $i = 1, \dots, 7$ gemessen:

t_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1.2	1.9	3.1	4.2	5.0	6.5	6.8

Stellen Sie ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ auf und bestimmen Sie die Lösung des linearen Ausgleichsproblems mit Matlab. Plotten Sie die Lösung und die Messwerte zusammen in einer *Figure*.

Hinweis: Mit den Befehlen `hold on` und `hold off` können mehrere Funktionen, Messwerte etc. in einer *Figure* geplottet werden. Unter dem Begriff *linespec* finden Sie in der Matlab-Hilfe einige Möglichkeiten, die Funktionen in einer *Figure* unterschiedlich zu gestalten.