

**Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“**

Übungsblatt 6 , Abgabe: 1.12.2006 , 8.00 Uhr

**Aufgabe 19:** (3+1 Punkte)Die  $(n, n)$ -Matrix  $A$  sei diagonaldominant, d.h. es gelte  $|a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$  für  $i = 1, \dots, n$ .

(a) Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|Ax\|_\infty \geq c\|x\|_\infty \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \quad c := \min_{i=1, \dots, n} \left( |a_{ii}| - \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \right)$$

und folgern Sie daraus die Abschätzung

$$\text{cond}_\infty(A) \leq \|A\|_\infty / c.$$

Hinweis: Betrachten Sie  $\|x\|_\infty = |x_r|$  und  $\|Ax\|_\infty \geq |(Ax)_r|$ .

(b) Bei der Spline-Interpolation begegnet man der Tridiagonal-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ \alpha_2 & 1 & \beta_2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \alpha_i, \beta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \beta_1, \alpha_n \leq 1/2, \\ \alpha_i + \beta_i = 1/2, \quad i = 2, \dots, n-1. \end{array}$$

Geben Sie eine Abschätzung für  $\text{cond}_\infty(A)$  an.**Aufgabe 20:** (4 Punkte)Berechnen Sie die Lösung  $x_0 \in \mathbb{R}$  des linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \|y - Ax\|_2^2, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) mit den Normalgleichungen,

(b) mit dem  $QR$ -Verfahren.Bestimmen Sie in beiden Fällen das Residuum  $\|y - Ax_0\|_2$  und skizzieren Sie die Lösung graphisch.

**Aufgabe 21:** (4 Punkte)

Berechnen Sie die kleinste-Quadrate-Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},$$

indem Sie das Householder-Verfahren »von Hand« durchführen, um die Matrizen  $Q$  und  $R$  zu bestimmen und das Gleichungssystem  $Rx = Q^*b$  zu lösen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Matlab. Schauen Sie sich dazu die Hilfe zu den Befehlen `qr`, `pinv` und zu dem arithmetischen Operator `\` an.

**Aufgabe 22:** (4 Punkte)

Für die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  wird ein linearer Zusammenhang  $y = \alpha + \beta t$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vermutet. In einem Experiment werden für die Punkte  $t_i$  die Werte  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$  gemessen:

$t_i$	1	2	3	4	5	6	7
$y_i$	1.2	1.9	3.1	4.2	5.0	6.5	6.8

Stellen Sie ein Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  auf und bestimmen Sie die Lösung des linearen Ausgleichsproblems mit Matlab. Plotten Sie die Lösung und die Messwerte zusammen in einer *Figure*.

Hinweis: Mit den Befehlen `hold on` und `hold off` können mehrere Funktionen, Messwerte etc. in einer *Figure* geplottet werden. Unter dem Begriff *linespec* finden Sie in der Matlab-Hilfe einige Möglichkeiten, die Funktionen in einer *Figure* unterschiedlich zu gestalten.