Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte WS 06/07

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 5 , Abgabe: 24.11.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 15: (2+2 Punkte)

(a) Man bestimme die der Norm

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

zugeordnete Matrixnorm.

(b) Seien A und T die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad d_1, d_2 > 0\,.$$

Für welche Werte d_1, d_2 wird die *transformierte* Norm $\|A\|_T = \|TAT^{-1}\|_\infty$ minimiert? Vergleichen Sie diese mit $\|A\|_\infty$.

Aufgabe 16: (2+2+1+1 Punkte)
Mit $\|\cdot\|$ werde eine Vektornorm des $\mathbb{R}^n$ und die zugeordnete Matrix-Norm bezeichnet. Beweisen Sie:

(a) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$,

(b) $\text{cond}\,(AB) \leq \text{cond}(A)\text{cond}(B)$,

(c) $\text{cond}_2(Q) = 1$, wenn Q orthogonal,

(d) $\text{cond}_2(QA) = \text{cond}_2(A)$, wenn Q orthogonal.

Aufgabe 17: (2+2 Punkte)
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Kondition $\text{cond}(A)$ für die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_F$.

(b) Für die Näherungen $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{x}$ von A, b, x gelte

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \quad \text{mit} \quad \|\tilde{A} - A\|_\infty \leq 0.013\,.$$

Wie groß darf der Fehler $\|\tilde{b} - b\|_\infty$ höchstens sein, damit $\|\tilde{x} - x\|_\infty \leq 0.5$ gilt?

Aufgabe 18: (Programmieraufgabe: Abgabe Freitag, 1.12.2006, 4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von

$$y_n = \frac{1}{3^n} \,, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

unter Verwendung der Formel

$$y_n = \frac{10}{3} y_{n-1} - y_{n-2} \,, \quad n = 2, 3, 4, ..., \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1}{3} \,. \tag{2}$$

(a) Beweisen Sie, dass (2) eine Formel zur Berechnung von (1) ist.

(b) Berechnen Sie mit dem Programm y_n nach (2) und den relativen Fehler $\epsilon_n = 1 - 3^n y_n$ von y_n für alle $1 \leq n \leq 25$.

(c) Wieso ist die Formel (2) anfällig für Rundungsfehler? Programmieren Sie eine *stabile* Formel $y_n = a y_{n-1} + b y_{n-2}$ mit $a \neq 0, \; b \neq 0$ in dem Sinne, dass Rundungsfehler keinen wesentlichen Einfluss haben. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von (b).

Hinweise:

(1) Rechnen Sie hier mit doppelter Genauigkeit (z.B. *double* oder *double precision*). Bei Matlab ist dies automatisch gegeben.

(2) In Matlab können Felder nicht mit dem Index 0 beginnen.

Geben Sie die Programmieraufgabe bitte als Ausdruck und per Email bei Ihrem Übungsgruppenleiter ab.