Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte WS 06/07

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 4 , Abgabe: 17.11.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 12: (2+2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(x_2 - x_3)^2$.

(a) Bestimmen Sie die Verstärkungsfaktoren $k_{1i}(x)$, $i = 1, 2, 3$.

(b) Sei $\tilde{x} = x + \Delta x$ eine Näherung von $x = (2.00, 1.00, 0.98)$ mit $|\Delta x_i| \leq 0.005$, $i = 1, 2, 3$. Schätzen Sie mit Hilfe der Verstärkungsfaktoren den relativen Fehler von f ab.

Aufgabe 13: (2+3 Punkte)

(a) Wie kann man die Maschinengenauigkeit eines Rechners experimentell bestimmen? Testen Sie Ihr Verfahren, indem Sie die Maschinengenauigkeit von Matlab bestimmen. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis.

(b) Die folgenden Ausdrücke berechnen theoretisch paarweise denselben Wert. Für welche Argumente sind die verschiedenen Ausdrücke rundungsfehleranfällig?

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \ , \\ \log x - \log y &= \log \frac{x}{y} \ , \\ 1 - \cos x &= 2 \sin^2 \frac{x}{2} \ . \end{aligned}$$

Können Sie Beispiele angeben, in denen unterschiedliche Ergebnisse für die Ausdrücke berechnet werden?

Hinweis: Die Maschinengenauigkeit in Matlab ist mit der Variable `eps` gegeben. Lassen Sie sich die Ergebnisse mit Hilfe des Befehls `format long` mit gesamter Mantissenlänge ausgeben. Geben Sie Aufgabe 13 a) bitte per E-Mail an Ihren Übungsgruppenleiter ab.

Aufgabe 14: (2+2 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \neq 0$. Zeigen Sie: In jeder Maschinenarithmetik gilt

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(x_0 \boxplus h) \boxminus f(x_0)}{h} = 0.$$

b) Betrachten Sie die Funktion

$$\epsilon(h) := \left| \frac{f(x_0 \boxplus h) \boxminus f(x_0)}{h} \boxminus f'(x_0) \right|$$

für $f(x) = \cos(x)$ und $x_0 = 1$. Erklären Sie, warum ϵ für $h \to 0$ zunächst abnimmt und dann größer wird. Was muss man tun, um den Unterschied zwischen der Ableitung und dem numerischen Differenzenquotienten möglichst klein zu halten (ohne Beweis)?