Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 3 , Abgabe: 10.11.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LL^t$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 11 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

»von Hand«. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von Matlab unter der Verwendung des Befehls `chol`.

Aufgabe 10: (2+1+1+2 Punkte)
Gegeben sei die symmetrisch positiv definite Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Somit existiert die Cholesky-Zerlegung $\mathcal{A} = LL^t$ mit $L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$, $L_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L_{21} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $L_{22} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Zeigen Sie:

a) Das Schur-Komplement $S := C - BA^{-1}B^t$ und der Block A sind symmetrisch positiv definit.

   Hinweis: Betrachten Sie den Vektor $x = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ und wählen Sie v, w zur Berechnung von $x^t \mathcal{A} x$ geeignet.

b) Wenn N eine reguläre Matrix ist, dann ist $M = N \cdot N^t$ symmetrisch positiv definit.

c) Es gilt $S = L_{22}\, L_{22}^t$.

d) Auch die Umkehrung von a) gilt:
   Wenn A und S positiv definit sind, dann ist auch $\mathcal{A}$ positiv definit.

Aufgabe 11: (Programmieraufgabe, Abgabe: 17.11.2007, 4 Punkte)
Programmieren Sie das Cholesky-Verfahren zur Lösung des LGS $Ax = b$ in den drei Schritten

$$A = LL^t\ , \qquad Lc = b\ , \qquad L^t x = c\ .$$

Testen Sie das Programm an der Matrix A aus Aufgabe 9 mit $b = (-10, 11, 49, 63)^t$.

Anwendung: Gegeben seien eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b \in \mathbb{R}$, und Werte $y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, die das Randwertproblem (RWP)

$$\ddot{y}(t) = f(t)\,, \qquad a \le t \le b\,, \qquad y(a) = y_a\,,\; y(b) = y_b\,,$$

löst. Mit einer Schrittweite $h > 0$ werden die Ableitungen approximiert durch

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &\approx \frac{1}{h}\left(y(t+h) - y(t)\right)\,, \\ \ddot{y}(t) &\approx \frac{1}{h}\left(\dot{y}(t) - \dot{y}(t-h)\right) \approx \frac{1}{h^2}\left(y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)\right)\,. \end{aligned}$$

Die Diskretisierung des Zeitintervalls

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b\,, \quad t_i = a + ih\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n, n+1\,,$$

mit der Schrittweite $h = (b-a)/(n+1)$ liefert die folgende Approximation des RWP:

$$\frac{1}{h^2}\left(y(t_i + h) - 2y(t_i) + y(t_i - h)\right) \approx f(t_i)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \quad y(t_0) = a\,,\; y(t_{n+1}) = b\,.$$

Überlegen Sie, dass man eine geeignete Approximation y_i von $y(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$, erhält durch die Lösung des LGS:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2 f(t_1) + y_a \\ -h^2 f(t_2) \\ \vdots \\ -h^2 f(t_{n-1}) \\ -h^2 f(t_n) + y_b \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens das obige RWP auf dem Intervall $[a,b] = [0,10]$ für

(a) $f(t) \equiv 1\,,\quad y_a = 0\,,\quad y_b = 50$ mit $n = 9\,,$

(b) $f(t) = 3t^2\,,\quad y_a = 0\,,\quad y_b = 2500$ mit $n = 9, 19, 49, 99\,.$

Berechnen Sie jeweils den absoluten Fehler der numerischen Lösung y_i, $i = 1, \ldots, n$, im Vergleich zur exakten Lösung $y(t) = \frac{1}{2}t^2$ bzw. $y(t) = \frac{1}{4}t^4$.