Prof. Dr. H. Maurer, Dipl. Math. Maike Schulte WS 06/07

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 10 , Abgabe: 19.01.2007 , 8.00 Uhr

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 9 & 0.6 \\ 0.6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

führe man ausgehend von $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zwei Schritte des Gesamt- und Einzelschrittverfahrens durch. Berechnen Sie die Anzahl der Iterationen k, die für die Genauigkeit $\|\bar{x} - x^{(k)}\|_\infty \leq 10^{-6}$ benötigt wird.

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Betrachten Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

das Gesamtschrittverfahren $x^{(k+1)} = C_G x^{(k)} + d$ mit $C_G = -D^{-1}(L+R),\ \ d = D^{-1}b$.

(a) Überlegen Sie, dass das starke Zeilensummenkriterium nicht erfüllt ist. Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren konvergent ist. Berechnen Sie dazu $\rho(C_G)$.

(b) Berechnen Sie $x^{(1)}$ mit $x^{(0)} = (0,1,1)^T$.

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Sei A eine (m,n)-Matrix mit $n \leq m$ und $\text{rang}(A) = n$. Sei $0 < r < \frac{2}{\sigma_1^2}$, wobei σ_1^2 der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.
Zeigen Sie: Die Iteration

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - rA^T(Ax^{(k)} - y)$$

konvergiert für jede Wahl von $x^{(0)},\ y \in \mathbb{R}^n$ gegen eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - Ax\|_2 \ .$$

Aufgabe 37: (4 Punkte)
Seien $C_G = -D^{-1}(L+R)$, $C_E = -(L+D)^{-1}R$ die Matrizen des Gesamt- bzw. Einzelschrittverfahrens. Man zeige: Falls für die Matrixelemente a_{ik}, $i,k = 1,\ldots,n$ der (n,n)-Matrix $A = L + D + R$ die Ungleichung

$$\sum_{k \neq i} |a_{ik}| < |a_{ii}| \ , \quad i = 1,\ldots,n \ ,$$

erfüllt ist, so gilt

$$\|C_E\|_\infty \leq \|C_G\|_\infty < 1 \ .$$

<u>Hinweis:</u> Für $x \in \mathbb{R}^n$, $y := C_E x$ zeige man induktiv

$$|y_k| \leq \|C_G\|_\infty \|x\|_\infty \ , \quad k = 1,\ldots,n \ .$$