Dr. Frank Wübbeling, Maike Schulte WS 2005/2006

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 9 , Abgabe: 20.12.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Sei A eine $\mathbb{C}^{n\times n}$–Matrix. Der betragsmaximale Eigenwert λ_1 von A hat die arithmetische Vielfachheit 4 und ist betragsmäßig echt größer als die restlichen Eigenwerte. Zu λ_1 gehören zwei Jordankästchen der Größe 2. Zeigen Sie: Die Potenzmethode konvergiert auch in diesem Fall für fast alle Startvektoren x^0 und Referenzvektoren d gegen λ_1. Bestimmen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit.

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie bei den Übungsaufgaben einen Link auf die Datei "C.matrix". Die Datei enthält eine 80x80-Matrix C, die ausschliesslich reelle Eigenwerte hat, die vom Betrag getrennt sind. Führen Sie an der Matrix folgende Berechnungen durch:

(a) Schätzen Sie den Betrag des betragsgrößten Eigenwerts von C ab.
(b) Berechnen Sie eine Näherung für den größten Eigenwert von C.
(c) Berechnen Sie eine Näherung für den kleinsten Eigenwert von C.
(d) Berechnen Sie eine Näherung für den betragskleinsten Eigenwert von C.
(e) Berechnen Sie eine Näherung für den Eigenwert von C, der am nächsten an -10 liegt.

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Programmieren Sie den LR-Algorithmus und testen Sie ihn an der Matrix C aus der vorherigen Aufgabe. Geben Sie nach jedem Schritt die Summe der Beträge der Elemente der Iterationsmatrix unterhalb der Hauptdiagonalen aus.

Falls Sie mit Matlab programmieren: Sie dürfen die sparse-Funktion LU benutzen (siehe Matlab–Hilfe). Programmieren Sie in diesem Fall aber zusätzlich auch den QR-Algorithmus und testen Sie wieder an der Matrix C. Vergleichen Sie die Approximationen nach 100 Schritten der Algorithmen. Plotten Sie die Beträge der Iterationsmatrizen mit IMAGESC.

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Sei A eine reelle $n \times n$–Matrix. Die erste Spalte von A sei $(\alpha, a_1^t)^t$ mit einer reellen Zahl α und einem Vektor a_1 der Länge $n-1$.

(a) Bestimmen Sie eine Spiegelung S' im $I\!R^{n-1}$, so dass

$$S'a_1 = ||a_1||e_1.$$

(b) Sei S eine $n \times n$–Matrix,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $B = SAS^{-1}$ erfüllt $B_{k,1} = 0$ für $k > 2$.
(c) Formulieren Sie einen Algorithmus, der zu jeder Matrix A eine Hessenbergmatrix H berechnet, die zu A ähnlich ist. Was gilt, wenn A symmetrisch ist?