

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 8 , Abgabe: 13.12.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 24: (4 Punkte)

Führen Sie die Potenzmethode durch für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.5 & -1 \\ -0.5 & 2.5 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1.5 & -0.5 \\ -1 & 2.5 & 0.5 \\ 2 & 1.5 & 4.5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es seien λ_j die dem Betrag nach geordneten Eigenwerte von A . Entscheiden Sie aufgrund des Verhaltens der x^k , welcher der folgenden Fälle vorliegt. Benutzen Sie als Startvektoren x^0 die Vektoren $(1, 1, 1)$ und $(1, 0, 0)$ und wählen Sie $d = (1, 1, 1)$.

- $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, aber $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$, λ_1 von algebraischer Vielfachheit 1.
- Zum betragsgrößten Eigenwert gehört ein Jordan-Kästchen der Länge größer als Eins.

Bestimmen Sie aus dem Verhalten der x^k in Fall b) einen Schätzwert für $|\lambda_2|$.

Aufgabe 25: (4 Punkte)Sei A die (n, n) -Matrix mit

$$a_{ii} = 2, \quad i = 1, \dots, n, \quad a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = -1, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Alle anderen Elemente von A seien 0.

Zeigen Sie, daß A die Eigenwerte

$$\lambda_\ell = 4 \sin^2 \left(\frac{\ell\pi}{2n+2} \right), \quad \ell = 1, \dots, n$$

hat.

Hinweis: Machen Sie für einen Eigenvektor x den Ansatz $x_i = \sin(c i)$, $i = 1, \dots, n$ und bestimmen Sie c . Benutzen Sie das Additionstheorem für den Sinus.

Aufgabe 26: (4 Punkte)Sei A die (n, n) -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A .
- (b) Zeigen Sie, daß jeder Eigenwert von A die geometrische Vielfachheit 1 hat.
- (c) Geben Sie die Jordansche Normalform von A an.

Aufgabe 27: (4 Punkte)

- (a) Wieviele paarweise nicht ähnliche $(6, 6)$ -Matrizen gibt es, deren charakteristisches Polynom $(\lambda - 3)^4 (\lambda - 1)^2$ ist?
- (b) Sei $w \in \mathbb{C}^n$ mit $\|w\|_2 = 1$.
Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von $A = I - 2ww^*$.