Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 6 , Abgabe: 6.12.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Sei A eine reelle $n \times n$–Matrix. Stellen Sie das Newton–Verfahren auf für das nichtlineare Gleichungssystem

$$F(X) = X^{-1} - A = 0.$$

Berechnen Sie die Komplexität eines Newton–Schritts. Ist das Verfahren konkurrenzfähig?

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller $a \in IR$, so daß
(a) das Gesamtschrittverfahren
(b) das Einzelschrittverfahren
zur Lösung von $Ax = b$ für alle $b \in IR^2$ und alle Startwerte $x_0 \in IR^2$ konvergiert.

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \, x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie jeweils drei Schritte des Jacobi– und des Gauss–Seidel–Verfahrens durch.
(b) Führen Sie (a) durch für den Relaxationsparameter $\omega = 0.5$.
(c) Stellen Sie jeweils fest, ob die Verfahren konvergieren.

Hinweis: Es ist Ihnen freigestellt, diese Aufgabe von Hand oder mit dem Rechner zu lösen.

Aufgabe 24: (4 Punkte)
Es sei u eine dreimal stetig differenzierbare Funktion von IR^2 nach IR, $N \in IN$ und $h = 1/N$. Sei weiter $u_{i,k} = u(ih, kh)$ für $0 \leq i, k \leq N$. Zeigen Sie:

$$u_{i,k+1} + u_{i,k-1} + u_{i-1,k} + u_{i+1,k} - 4u_{i,k} = 4h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)(ih, kh) + O(h^3)$$

für $0 < i, k < N$.