Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 6 , Abgabe: 29.11.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 17: (8 Punkte)
Ein extrem vereinfachtes Modell zur Populationsentwicklung in einem begrenzten Lebensraum ist gegeben durch die Definition $x_{k+1,\lambda} = \lambda x_{k,\lambda}(1 - x_{k,\lambda})$, $k > 0$. Hierbei ist $x_{0,\lambda}$ die Anfangspopulation, $x_{k,\lambda}$ die Größe der Population zum Zeitpunkt k und λ ein für jede Iteration fester Umweltparameter.

1. Auf der Webseite zur Vorlesung finden Sie ein Matlab-Programm `dyn1d(lambdamin, lambdamax)`, das die Populationsentwicklung in Abhängigkeit von λ bei zufälliger Anfangspopulation grafisch darstellt. Zeile j im ausgegebenen Bild steht für einen Wert λ_j im Intervall $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ (angegeben auf der y-Achse). Für jede Zeile werden die Folgenelemente x_{k,λ_j} für $k = 1000 \dots 2000$ ausgerechnet und entsprechend der Angabe auf der x-Achse mit einem Punkt in die Grafik eingetragen.

   Beispiel: Falls in einer Zeile nur ein Punkt steht, so sind alle Folgeglieder fast gleich, und die Vermutung liegt nahe, dass die Folge konvergiert.

   Machen Sie sich mit dem Programm vertraut. Betrachten Sie einige interessante Bereiche der Grafik genauer (z.B. $[3.53, 3.58]$ und $[3.81, 3.86]$). Welche drei verschiedenen Arten des asymptotischen Verhaltens lassen sich beobachten?

2. Untersuchen Sie für $0 \leq \lambda \leq 4$ analytisch, ob es stabile Populationsgrößen (anziehende Fixpunkte) gibt.

3. Zeigen Sie, dass die Folge für $\lambda > 3$ zunächst stabil zwischen zwei Häufungspunkten wechselt. Geben Sie den exakten Wert von λ an, bei dem der Wechsel von zwei Häufungspunkten auf vier Häufungspunkte stattfindet.

Hinweis: Man tut sich leichter mit einem Programm zum symbolischen Rechnen.

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Untersuchen Sie, wann das Newton–Verfahren für die Funktionen $f(x) = x^n - a$ und $g(x) = a - 1/x$, $a \in I\!R^+$, $n \in I\!N$, konvergiert.

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Sei A eine $(n \times n)$–Matrix. Das Eigenwertproblem $Ax = \lambda x$ ist äquivalent zu dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$Ax - \lambda x = 0,\ ||x||_2^2 - 1 = 0.$$

1. Stellen Sie das zugehörige Newton–Verfahren auf.

2. Zeigen Sie: Ist λ ein algebraisch einfacher Eigenwert von A (d.h., λ ist einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A), so konvergiert das Newtonverfahren quadratisch, falls λ_0 und x_0 nah genug an einem Eigenwert λ mit normiertem Eigenvektor x liegen.

Aufgabe 20: (0 Punkte)