Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 5 , Abgabe: 22.11.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Für die der euklidischen Norm im $I\!R^n$ zugeordnete Matrixnorm $||\cdot||_2$ einer $n \times n$–Matrix A gilt

$$||A||_2 = \sqrt{\text{maximaler Eigenwert von } A^t A}.$$

Aufgabe 14: (6 Punkte)
Sei A eine $n \times m$–Matrix, nicht notwendig mit vollem Rang. Zeigen Sie:

(a) $AA^+A = A$
(b) $A^+AA^+ = A^+$
(c) Ist A eine normale $n \times n$–Matrix, d.h. $AA^t = A^tA$, so gilt $AA^+ = A^+A$.
(d) Seien u und v Elemente des $I\!R^n$, $||u||_2 = ||v||_2 = 1$. Berechnen Sie die Moore–Penrose–Inverse der Matrix uv^t.

Aufgabe 15: (3 Punkte)
Es soll das lineare (2×2)–Gleichungssystem $Ax = b$ gelöst werden. Für A und b stehen die Näherungen

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \tilde{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zur Verfügung. Es ist bekannt, dass der relative Fehler jedes Eintrags in Matrix und Vektor maximal 1 Prozent beträgt.

(a) Zeigen Sie: A ist invertierbar.
(b) Berechnen Sie die Lösung $\tilde{x}$ von $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Schätzen Sie den relativen Fehler von $\tilde{x}$ bezogen auf x in einer passenden Norm ab.
(c) Berechnen Sie die Kondition von $\tilde{A}$ in der 1–Norm, in der euklidischen Norm und in der ∞–Norm.

Aufgabe 16: (3 Punkte)
Eine Messreihe, bei der ein linearer Zusammenhang zwischen den Größen t und y vermutet wird, liefert folgende Ergebnisse:

t_k	0	1	1	2	3	3
y_k	2.2427	4.1944	4.3565	6.3048	8.1826	8.0074

Bestimmen Sie eine lineare Funktion $y(t) = at + b$ so, dass der Fehler

$$\sum_{k=1}^{6} (y(t_k) - y_k)^2$$

minimal wird unter allen linearen Funktionen. Zeichnen Sie die Messpunkte und die Funktion (per Hand oder per Rechner).