Dr. Frank Wübbeling, Maike Schulte WS 2005/2006

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 3 , Abgabe: 15.11.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Sei A eine invertierbare $n \times n$–Matrix.

1. Zeigen Sie, dass die Inverse von A in $n^3 + O(n^2)$ Operationen und n Divisionen berechnet werden kann. Hinweis: Lösen Sie das Gleichungssystem $AX = I$.

2. Falls A die Bandbreite m hat, d.h. $A_{i,k} = 0$ für $|i-k| > m$, und A eine LR–Zerlegung besitzt, so ist diese mit $nm^2 + O(nm)$ Operationen und n Divisionen berechenbar.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Die QR-Zerlegung einer invertierbaren $(n \times n)$–Matrix A ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Diagonalmatrix mit $|D_{ii}| = 1$, $i = 1 \dots n$, d.h. falls $A = QR = Q'R'$, so gilt $Q' = QD$ und $R = DR'$.

Aufgabe 11: (4 Punkte)
(a) Eine Hessenbergmatrix A erfüllt $A_{i,j} = 0$ für $i > j + 1$. Wieviele Rechenoperationen benötigt man für die QR-Zerlegung einer $n \times m$–Matrix nach Householder, $n \geq m$?

(b) Eine Alternative zur Householdermethode ist die Givens–Rotation. Sei φ ein Rotationswinkel, $c = \cos\varphi$ und $s = \sin\varphi$. Dann heißt die unitäre $n \times n$–Matrix G Givens–Rotation um den Winkel φ in der Ebene (i, k), falls G mit der Einheitsmatrix übereinstimmt außer in folgenden Elementen:

$$G_{i,i} = c,\ G_{i,k} = s,\ G_{k,i} = -s,\ G_{k,k} = c$$

für ein Paar (i, k) mit $1 \leq i, k \leq n$.

Sei A die Hessenbergmatrix aus (a). Bestimmen Sie φ so, dass für die Givens–Rotation G um den Winkel φ in der $(1, 2)$-Ebene gilt: GA hat in der ersten Spalte nur Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Schreiben Sie eine Prozedur qr, die die QR–Zerlegung einer $n \times m$–Matrix berechnet. Ihr Programm sollte die Matrix R und die Vektoren v_k, $k = 1 \dots \min(m-1, n-1)$, berechnen.

Schreiben Sie weiter eine Prozedur $qmalx$, die Q effizient auf einen Vektor anwendet (wie in der Vorlesung).

Testen Sie Ihr Programm für die Matrix $n \times m$–Matrix A, $A_{i,k} = 1/(i+k-1)$, $n = 100, 200$, $m = 50, 100$. Wenden Sie zum Test Ihr Programm $qmalx$ auf die einzelnen Spalten der Matrix R an und geben Sie die Norm von $QR - A$ aus.