

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische MathematikÜbungsblatt 2 , Abgabe: 8.11.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Nehmen Sie an, dass die Gauss-Elimination ohne Permutation durchführbar ist und seien $A^{(i)}$, $i = 1 \dots n$ die in ihrem Verlauf auftretenden Matrizen.

1. Zeigen Sie: Der j . Hauptminor ist in allen Matrizen $A^{(i)}$ gleich, $j = 1 \dots n$.
2. Zeigen Sie: Falls A symmetrisch ist, so ist auch die $(n - i + 1) \times (n - i + 1)$ -Matrix, die aus $A^{(i)}$ durch Streichung der ersten $(i - 1)$ Zeilen und $(i - 1)$ Spalten hervorgeht, symmetrisch.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Folgern Sie aus Aufgabe 5:

1. Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix lässt sich mit $n^3/3 + O(n^2)$ Operationen berechnen.
2. Für eine positiv definite $n \times n$ -Matrix A ist die Gauss-Elimination immer ohne Permutation durchführbar. Sie lässt sich in $n^3/6 + O(n^2)$ Operationen berechnen. Auf der Hauptdiagonalen von $A^{(n)}$ stehen nur positive Elemente.

Aufgabe 7: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Das Produkt von rechten oberen (linken unteren) Dreiecksmatrizen ist wieder eine rechte obere (linke untere) Dreiecksmatrix.

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung der Cholesky-Zerlegung, das mit der Anzahl von Operationen aus Aufgabe 6 auskommt. Testen Sie Ihr Programm an der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 29 & 44 & 7 \\ 6 & 44 & 94 & 16 \\ 1 & 7 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$