

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 1 , Abgabe: 2.11.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

1. Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in \mathbb{R} \neq 0$. Zeigen Sie: In jeder Maschinarithmetik gilt

$$\lim_{\substack{h \mapsto 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 \oplus h) \ominus f(x_0)}{h} = 0.$$

2. Betrachten Sie die Funktion

$$\epsilon(h) := \left| \frac{f(x_0 \oplus h) \ominus f(x_0)}{h} \ominus f'(x_0) \right|$$

für $f(x) = \cos x$ und $x_0 = 1$.

Erklären Sie, warum ϵ für $h \mapsto 0$ zunächst abnimmt und dann größer wird. Was muss man tun, um den Unterschied zwischen der Ableitung und dem numerischen Differenzenquotienten möglichst klein zu halten? (ohne Beweis)

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Berechnen Sie die Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0, \quad p = 1, \quad q = 10^{-4}$$

auf einem hypothetischen Rechenwerk mit $b = 10$ und $m = 2$ anhand der Formeln:

- $x_1 = -p/2 - \sqrt{p^2/4 - q}$, $x_2 = -p/2 + \sqrt{p^2/4 - q}$
- $x_1 = -p/2 - \sqrt{p^2/4 - q}$, $x_2 = q/x_1$

und erklären Sie das Ergebnis. Geben Sie die Verstärkungsfaktoren an.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Testen Sie, ob die schnelle komplexe Multiplikation, d.h. die Berechnung von

$$(a_1 + a_2\mathbf{i}) \cdot (b_1 + b_2\mathbf{i}) = (a_1 + a_2)b_1 - a_2(b_1 + b_2) + ((a_1 + a_2)b_1 + a_1(b_2 - b_1))\mathbf{i}$$

gutartig ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Rho-Arithmetik: Sei $R = \{\rho \in \mathbb{R}^+ : |\log \rho| \leq \text{eps}\}$. Ein Algorithmus \tilde{f} zur Auswertung einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ heißt **rückwärtsstabil**, wenn es für alle Argumente (x_1, \dots, x_n) Zahlen $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ gibt mit $f(x_1, \dots, x_n) = f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ und $x_k \sim \tilde{x}_k$, $k = 1 \dots n$.

Zeigen Sie:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\text{rd}(x) = \rho x$ für ein $\rho \in R$.
2. Seien ρ_1 und ρ_2 in R . Dann gibt es Zahlen ρ_3, ρ_4 in R mit $\rho_1 \rho_2 = \rho_3^2$, $\rho_1 / \rho_2 = \rho_4^2$.
3. Der Standardalgorithmus zur Auswertung von $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ ist rückwärtsstabil, die Berechnung des Realteils der komplexen Multiplikation wie in Aufgabe 3 ist nicht rückwärtsstabil.