

**Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik**

Übungsblatt 13 , Abgabe: 24.1.2005 , 11.00 Uhr

**Aufgabe 44:** (4 Punkte)

Berechnen Sie den Spline  $B_{0,4}(x)$  für  $x_i = i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  und stellen Sie ihn graphisch dar.

**Aufgabe 45:** (4 Punkte)

Sei  $s$  ein (kubischer) Spline der Ordnung 4 zu den Knoten  $x_0$  bis  $x_n$  auf dem Intervall  $[a, b]$ , der die reellen Punkte  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0 \dots n$ , interpoliert. Sei  $g \in C^2([a, b])$  eine weitere interpolierende Funktion mit  $g'(a) = s'(a)$  und  $g'(b) = s'(b)$ . Dann gilt

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (g''(x))^2 dx.$$

Hinweis: Schreiben Sie  $g'' = s'' + (g'' - s'')$ , rechnen Sie die Integrale aus und verwenden Sie partielle Integration.

**Aufgabe 46:** (4 Punkte)

Seien  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist der Vektor  $c = (a * b) \in \mathbb{R}^n$  definiert durch  $c_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{k-j}$ ,  $k = 1 \dots n$ , wobei  $a$  und  $b$  periodisch sind mit der Periode  $n$ , also  $b_l = b_{l+n}$  und  $a_l = a_{l+n}$ . Zeigen Sie:

a)  $\hat{c}_k = n \hat{a}_k \hat{b}_k$

b) Sei  $n = 2^m$  für eine ganze Zahl  $m$ . Dann kann man  $c$  aus  $a$  und  $b$  in  $O(n \log n)$  Rechenoperationen berechnen.

**Aufgabe 47:** (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Newton–Cotes–Formel der Ordnung  $n = 6$ .

b) Zeigen Sie, dass für die Ordnung  $n = 8$  negative Gewichte auftreten. Hinweis: Berechnen Sie das Gewicht der dritten Stützstelle. Begründen Sie, warum negative Gewichte numerisch bedenklich sind.