

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 13 , Abgabe: 24.1.2005 , 11.00 Uhr

Aufgabe 44: (4 Punkte)

Berechnen Sie den Spline $B_{0,4}(x)$ für $x_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ und stellen Sie ihn graphisch dar.

Aufgabe 45: (4 Punkte)

Sei s ein (kubischer) Spline der Ordnung 4 zu den Knoten x_0 bis x_n auf dem Intervall $[a, b]$, der die reellen Punkte (x_i, y_i) , $i = 0 \dots n$, interpoliert. Sei $g \in C^2([a, b])$ eine weitere interpolierende Funktion mit $g'(a) = s'(a)$ und $g'(b) = s'(b)$. Dann gilt

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (g''(x))^2 dx.$$

Hinweis: Schreiben Sie $g'' = s'' + (g'' - s'')$, rechnen Sie die Integrale aus und verwenden Sie partielle Integration.

Aufgabe 46: (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist der Vektor $c = (a * b) \in \mathbb{R}^n$ definiert durch $c_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{k-j}$, $k = 1 \dots n$, wobei a und b periodisch sind mit der Periode n , also $b_l = b_{l+n}$ und $a_l = a_{l+n}$. Zeigen Sie:

a) $\hat{c}_k = n \hat{a}_k \hat{b}_k$

b) Sei $n = 2^m$ für eine ganze Zahl m . Dann kann man c aus a und b in $O(n \log n)$ Rechenoperationen berechnen.

Aufgabe 47: (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Newton–Cotes–Formel der Ordnung $n = 6$.

b) Zeigen Sie, dass für die Ordnung $n = 8$ negative Gewichte auftreten. Hinweis: Berechnen Sie das Gewicht der dritten Stützstelle. Begründen Sie, warum negative Gewichte numerisch bedenklich sind.