Dr. Frank Wübbeling, Maike Schulte WS 2005/2006

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 12 , Abgabe: 24.1.2006 , 11.00 Uhr

Aufgabe 41: (4 Punkte)
Sei $f \in C^{(n+2)}[a,b]$, $x_0,\ldots,x_n \in [a,b]$ paarweise verschieden und $p \in \mathcal{P}_n$ das Interpolationspolynom von f an den Stützstellen $x_0,\ldots,x_n$, d.h. $p(x_j) = f(x_j)$, $j = 0,\ldots,n$. Zeigen Sie: Zu jedem j existiert ein $\tilde{x}_j \in [a,b]$ mit

$$f'(x_j) - p'(x_j) = \prod_{i \neq j}(x_j - x_i)\frac{f^{(n+1)}(\tilde{x}_j)}{(n+1)!} .$$

Aufgabe 42: (8 Punkte)
a) Schreiben Sie ein Programm, das den FFT–Algorithmus der Vorlesung implementiert für (inverse und direkte) Fouriertransformationen der Länge 2^n. Testen Sie es, indem sie die Fouriertransformation von Vektoren der Form $y_k = e^{2\pi ikl/n}$, l ganz, berechnen und mit der analytischen Lösung vergleichen.
b) Wenden Sie Ihr Programm auf ein einfaches Bildkompressionsproblem an. Auf der Homepage der Vorlesung unter den Übungen finden Sie eine 256x256-Matrix M_1 unter dem Namen "trui.matrix", die ein Bild darstellt (im Textformat). Unter matlab laden Sie das Bild mit `load 'trui.matrix'` und zeigen Sie es an mit `imagesc(trui)` und `colormap('gray')`.

Wenden Sie die Fouriertransformation auf alle Zeilenvektoren von M_1 an, und fügen Sie die Transformierten wieder zu einer Matrix M_2 zusammen. Wenden Sie nun die Fouriertransformation auf die Spaltenvektoren von M_2 an und Sie erhalten wie oben eine neue Matrix, M_3.

Setzen Sie nun $(M_3)_{ik} = 0$, falls $|(M_3)_{ik}|$ kleiner ist als ein Schwellenwert ϵ, so daß nur etwa zehn Prozent der Elemente von M_3 übrigbleiben.

Führen Sie nun die inverse Fouriertransformation zunächst auf den Spalten, dann auf den Zeilen von M_3 durch (wie oben). Sie erhalten eine Matrix M_4. Zeigen Sie den Realteil wieder als Falschfarbenbild an und vergleichen Sie mit dem Originalbild.

Aufgabe 43: (4 Punkte)
Seien $x_0,\ldots,x_{n-1}$, $y_0,\ldots,y_{n-1}$ reell. Zeigen Sie:

(a) $\hat{x}_{n-k} = \overline{\hat{x}}_k, \quad k = 0,\ldots,n-1.$

(b) Mit $z_k = x_k + iy_k$ gilt

$$\hat{x}_k = \frac{1}{2}\left(\overline{\hat{z}}_{n-k} + \hat{z}_k\right) , \quad \hat{y}_k = \frac{i}{2}\left(\overline{\hat{z}}_{n-k} - \hat{z}_k\right) .$$

(c) Zwei Fourier-Transformationen der Länge n auf reellen Daten kann man bis auf einen gemeinsamen Faktor ausführen durch eine komplexe Fourier-Transformation der Länge n, plus n komplexe Additionen.